Dans nos classes

Extraire des relations fonctionnelles, c'est difficile !

Analyse de travaux collectifs d'élèves de Seconde sur un problème de programmation linéaire

Chantal Feusier Basilio
Paris

Cet article rend compte de quelques observations faites sur des élèves de seconde travaillant en petits groupes à la mise en inéquations d'un problème de programmation linéaire, puis à sa représentation graphique. Les erreurs et les difficultés les plus fréquentes ou caractéristiques y sont rapportées et analysées.

I- INTRODUCTION

Le but de cet article est de communiquer certaines observations et réflexions faites au cours d'un travail de recherche sur l'enseignement de l'Algèbre à des élèves de seconde indifférenciée (Lycée J.B.Say à Paris en 1986), avec quelques-uns de mes élèves.

Le dispositif utilisé a été l'enregistrement de 9 groupes de 2 à 3 élèves en train de résoudre un problème de programmation linéaire à deux variables (ANNEXE 1). Ce type de problème a l'avantage d'impliquer plusieurs concepts et plusieurs modes d'expression et de représentation : le langage naturel (énoncé de la situation, activité langagière des élèves), les écritures mathématiques de type algébrique, les représentations graphiques. Les élèves ont pu, à travers ces différents types de signifiant, évoquer leurs représentations mentales des concepts et des invariants opératoires en jeu (inconnues, variables, propriétés etc).

LE PROBLEME :

Il s'agissait de leur faire trouver le moyen le plus économique de transporter 1 600 personnes et 90 tonnes de bagages en louant des avions : on pouvait disposer au maximum de 12 avions de type A loués 4 millions de Francs chacun, transportant 200 passagers et 6 tonnes de bagages et de 9 avions de type B loués 1 million de Francs transportant 100 passagers et 15 tonnes de bagages.

Ils devaient, pour la première question, trouver les relations correspon-dant à toutes ces données, à l'exclusion de celles qui concernaient le coût. Dans la deuxième question, ils devaient en donner une représentation graphique. On utilisait les lettre x et y pour désigner respectivement le nombre d'avions de type A et celui de type B nécessaires au transport. Les relations attendues sont les suivantes :

$$0 \leq x \leq 12$$
$$0 \leq y \leq 9$$
$$200x + 100y \geq 1\,600$$
$$6x + 15y \geq 90.$$

Ces relations sont données au bout d'une demi-heure s'ils ne les trouvent pas, afin qu'ils puissent traiter la question suivante.

Les élèves n'ont eu aucune information sur l'existence même d'un coût de location pendant la première heure de travail, ils ne pouvaient aborder les questions relatives à ce coût qu'après avoir eu connaissance des réponses correctes aux deux premières questions, c'est-à-dire au bout d'une heure (ceci dans le but de faciliter l'analyse et la comparaison des travaux d'élèves).

II- ANALYSE DES PROPOSITIONS DES ELEVES.

CONCEPTS PRINCIPAUX :

Les concepts en jeu ont un caractère d'outil en ce sens qu'ils fonction-nent dans diverses questions et permettent de les résoudre. Chacun s'imbrique dans un réseau gravitant autour d'un concept principal qui semble être le concept de fonction. Il y a en effet, dès la première question quatre fonctions linéaires en jeu : $x \rightarrow 200x$

$y \rightarrow 100y$

$x \rightarrow 6x$

$y \rightarrow 15y$

ainsi que les combinaisons donnant le nombre de places et la capacité de bagages offerts par x avions A et y avions B :

$(x\ ;\ y) \rightarrow 200x + 100y$

$(x\ ;\ y) \rightarrow 6x + 15y.$

Autour de ce concept de fonction gravitent ceux de variable, de repère du plan et de coordonnées, d'inéquation*et d'inconnue.

PROCESSUS PSYCHOLOGIQUES ET SOCIAUX

La situation paraît simple telle qu'elle est présentée et chacun peut s'investir personnellement dès le début. Très rapidement, les élèves se heurtent à des difficultés et doivent argumenter pour expliquer leurs propositions, voire les prouver en cas de contestation. (Je m'efforçais de garder le rôle d'un observateur aussi neutre que possible). Les contradictions qui sont ainsi apparues entre eux ont été des facteurs de déséquilibre et ont éventuellement joué un rôle productif. Il semble que dans une situation de résolution collective de problème et de débat, l'appropriation collective des connaissances peut favoriser et même précéder l'appropriation individuelle des connaissances.(Le conflit socio-cognitif, tel qu'il est, permet l'intégration de points de vue opposés dans un nouveau schème ; il est étudié aujourd'hui par de nombreux psychologues sociaux, l'école Genevoise, par exemple).

III- MATHEMATISATION DE LA SITUATION

Les élèves ont, pour la plupart, cherché un moyen de transporter ce chargement avec un minimum d'avions sans se préoccuper du coût. Ils ont exprimé de nombreux raisonnement arithmétiques à l'aide de termes ou des notations algébriques, répondant ainsi à ce besoin, tout en essayant de répondre à la première question, c'est-à-dire : "*écrire toutes les relations* *mathématiques traduisant cette situation à l'aide du signe ≤ et des entiers naturels x et y ".*

A l'issue de la première demi-heure qui était impartie à cette question, trois groupes seulement, sur les 9 groupes, avaient trouvé l'expression donnant le nombre de passagers transportés : $200x + 100y$.

L'élève ne vient pas spontanément de lui-même à une méthode algébri-que surtout pour des problèmes qu'il imagine pouvoir traiter par d'autres méthodes. Il y a ici une conduite de détour à effectuer lors de l'utilisation de l'algèbre qui lui est propre, face à laquelle il résiste : cette rupture épistémologique importante d'avec l'arithmétique mérite une analyse détaillée. Pour G.VERGNAUD (Colloque de Sèvres, 1982), beaucoup d'élèves n'entrent pas facilement dans le jeu des manipulations symboliques qu'elle exige et se détournent alors des mathématiques. Il explique qu'en effet, avec l'algèbre, l'élève est amené à :

- ◊ formaliser d'emblée les hypothèses sous forme de relations
- ◊ ne pas calculer les inconnues directement
- ◊ traiter des inconnues intermédiaires n'ayant aucun sens
- ◊ s'interroger sur le sens des grandeurs en jeu
- ◊ s'en remettre au jeu des écritures
- ◊ utiliser des égalités ou des inégalités dans des sens nouveaux où l'égalité, par exemple, n'est plus l'annonce d'un résultat.

Aussi, semble-t-il utile de présenter à l'élève un nombre suffisant de problèmes non résolubles facilement par l'arithmétique, qui lui prouvent que l'algèbre est un bon moyen de les résoudre.

L'analyse des propos des élèves tend à faire apparaître que la question qu'ils se sont posée, souvent de manière implicite, était de trouver le nombre minimum d'avions capables d'effectuer ce transport, bien que les deux premières questions proposaient une toute autre recherche. La découverte tardive de l'existence d'un problème de coût n'y est sans doute pas étrangère. Et l'on observe effectivement un va et vient entre une recherche arithmétique relative à cette dernière question et le travail algébrique explicitement proposé.

IV- DEMARCHES RELEVANT PLUTOT DE L'ARITHMETIQUE

Presque tous les élèves ont cherché si les 21 avions étaient suffisants au transport proposé, puis le nombre d'avions A nécessaires aux 1 600 passagers indépendamment des bagages ou bien des problèmes du même type avec les avions B ou les bagages.

a) 8 groupes sur 9 ont cherché à **minimiser l'effectif** d'avions réalisant le transport à effectuer ; pour la plupart, ils comparent les types d'avions pris individuellement ou dans leur ensemble quant à leurs caractéristiques, ou calculent les caractéristiques de l'ensemble constitué par 1 avion de type A et 1 avion de type B (ce dernier cas concerne 3 groupes!).

b) **L'utilisation erronée des lettres x et y** a été observée dans tous les groupes à des degrés divers, avant de devenir correcte ensuite pour certains. Il semble que ces lettres avaient surtout un rôle de codage de l'information donnée par le texte, elles étaient alors associées au signe = et ≤ qui n'avaient alors un sens que s'ils signifiaient pour eux un lien du type "est en relation avec". (Notons à ce sujet qu'il était demandé explicitement de traduire l'énoncé à l'aide de x et y, et du signe ≤). En voici quelques exemples:

1) $x = 200$, $y = 100$ et $x = 6$, $y = 15$
2) $0 \leq x \leq 200$
3) $x < 200p + 6t$
4) $100 \leq x + y \leq 200$

(Dans ces deux derniers exemples, le signe + veut dire "et").

Dans cinq groupes apparaissent les notations redondantes x_A et y_B. Un élève introduit une notation pour désigner une variable intermédiaire Q_{A_P} désignant $200x$ et 3 notations analogues pour $100y$, $6x$ et $15y$. De plus, on observe, aussi bien avec x et y qu'avec d'autres notations, qu'une même lettre peut signifier des quantités différentes, et cela se trouve parfois dans une même phrase : la conservation du sens d'une notation donnée n'est acquise que pour peu d'entre eux.

c) **Les comparaisons ou additions de grandeurs de natures différentes** qui ont été écrites n'ont jamais été suivies d'effet (sauf dans un groupe qui avait fait un codage des informations non interprétable). Dans tous les autres cas, quand le signe + est utilisé abusivement, il peut être remplacé par la conjonction "et" : ils n'effectuent pas ces "additions" de passagers et de bagages.

Par contre, l'erreur d'écriture d'une unité dans un rapport va retarder la progression d'un groupe qui n'a pas pris conscience de l'erreur. Il s'agit de :

$$\frac{1\,600p}{200p} = 8_p \quad \text{et} \quad \frac{90t}{5t} = 15t$$

Cette erreur semble leur faire oublier qu'ils cherchaient, avec ce premier rapport, le nombre d'avions A pouvant transporter les 1 600 passagers.

d) "Raccourcis verbaux" :

Les élèves omettent souvent des mots dans leurs propos, pour dire, par exemple : "*personnes de type A*" ou bien "*A il doit être inférieur ou égal à 200 personnes*". Tous comprennent alors qu'il s'agit de l'effectif des places disponibles dans les avions de type A : la fonction de référence du langage ou du symbolisme l'emporte sur la fonction d'écriture ou de formulation d'une relation vraie.

V- DEMARCHES RELEVANT PLUTOT DE L'ALGEBRE

a) La découverte de la fonction linéaire : $x \rightarrow 200x$.

Elle n'a pas été dépassée par certains pendant la première demi-heure et certains même résistent à l'utiliser, par incompréhension, quand on propose le produit $200x$ seul ou dans l'expression combinée $200x + 100y$. L'un dit même : "*On ne peut pas multiplier des personnes par un nombre d'avions*".

Deux autres vont aussi remplacer x par 12 dans l'écriture $200x$ dès qu'on leur propose le produit $200x$. Une élève écrit : $x_p = x_{200} = x \times 200$. Cette écriture, où le signifiant x est dévié par un traitement formel, permet paradoxalement à l'élève une progression vers la solution. L'écriture, même fausse, peut être une aide à la pensée. Mais tous les groupes ne sont pas nécessairement passés par l'intervention de la fonction linéaire à une variable.

b) La découverte de la fonction : $(x\ ;\ y) \rightarrow 200x + 100y$.

Certains ont fait apparaître directement la fonction linéaire des deux variables x et y :

- Un groupe écrit d'abord $Ax + By$, en disant : A et B sont inférieurs à 200 et 100, puis un élève écrit $Q_{A_p}x + Q_{B_p}y$; il trouve, aussitôt après, la relation : $200x + 100y \leq 1600$, dans le mauvais sens d'ailleurs.
- Un autre écrit : $200x + 100y = (x + y)1600$ et ne parvient pas à modifier le second membre de son égalité, ni donc à progresser vers la solution.
- Un groupe part de l'écriture :

$$xA + yB = x\,(200p + 6t) + y(100p + 15t) = 1\,600p + 90t$$

et semble bloqué ensuite parcequ'il la remplace par l'écriture suivante :

$12(200p + 6t) + 9(100p + 15t) \leq 1\ 600p + 90t$
(où les inconnues x et y sont remplacées par leurs maxima mais où apparaît cependant le signe $\leq$).
- Un autre groupe formule le système : $p_A + p_B \leq p_z$
$b_A + b_B \leq b_z$
avec des notations qui ne sont pas clairement définies.
- Les autres groupes sont partis sur des fonctions linéaires du type : $x \rightarrow 200x$.

c) Le sens des inégalités à trouver a souvent posé problème.

Il y a, par exemple, une certaine répugnance à envisager l'utilisation des avions en dessous de leurs capacités : ils s'interdisent ainsi d'envisager un choix d'effectif d'avions permettant de transporter un peu plus de 1 600 passagers ou 90 tonnes de bagages.

On trouve le plus souvent les inégalités dans le mauvais sens, peut-être pour cette dernière raison, peut-être aussi sous l'influence du sens de la relation "≤" écrite dans l'énoncé ; il y a, en effet, 5 propositions données dans le mauvais sens pour deux relations correctes. Certains même expriment des doutes assez forts sur le sens correct de la relation quand je la leur montre à la fin du temps imparti à la question.

d) Cas où le signifiant dévie le signifié :

Dans certains cas, la situation réelle semble oubliée au profit d'un regard sur les écritures pour elles-mêmes. Cela peut donner :

$0 \leq x + y \leq 12 + 9$ pour trois groupes
Dans ce premier cas, ils proposent une relation simplement inutile : elle semble correspondre au besoin de répondre à une question qui demandait des relations

ou bien : $x_p = x_{200} = x \times 200$
Ces égalités semblent aider l'élève, comme nous l'avons vu au 4-a.

ou bien encore :
$$x = \frac{1\ 600p + 90t}{200p + 6t} = 8p + 15t$$
Cette dernière écriture a peut-être empêché les élèves d'aller plus loin (Cf 3-c).

On observe les erreurs les plus graves chez le groupe le plus faible : le calcul absurde d'additions de grandeurs de natures différentes y est effectué et une élève propose ainsi : $206x + 115y \geq 1\ 690$, après qu'elle ait eu connaissance de la donnée complète de la solution : $200x + 100y \geq 1600$
$6x + 15y \geq 90$.

Devant les réticences de l'autre élève du groupe, elle insiste en s'appuyant sur l'argument selon lequel *"c'est mathématique, alors on peut le faire !!"*.

VI- PROBLEMES PLUTOT LIES AU GRAPHIQUE

a) Diversité des statuts attribués à x et y :

Dans l'ensemble, les élèves ne paraissent pas rencontrer trop de difficultés à envisager x comme une inconnue à trouver, puis comme variable prenant ses valeurs dans un ensemble correspondant à une seule contrainte (par exemple $0 \leq x \leq 12$), puis dans l'intersection des ensembles correspondants à toutes les contraintes. (Le problème a plutôt été de comprendre l'intérêt du graphique pour résoudre le problème). Une élève, cependant, résiste à utiliser x comme variable. Elle avait longtemps cherché à trouver x par un jeu d'équivalences d'inéquations avant d'être contrainte d' abandonner : cet "ancrage" du statut de x comme inconnue explique peut-être qu'elle résiste à considérer ensuite x comme variable. Elle dit : *"Comment tu vas tracer ta droite ? x et y on les a pas : c'est des inconnues!"*.

b) Choix des axes

L'énoncé précisait seulement de *"représenter dans un plan rapporté à un repère orthonormé l'ensemble S des solutions du système d'inéquations trouvé au 1er"*. (Ce n'est qu'après avoir trouvé les axes corrects qu'ils pouvaient lire l'indication : *"On remarquera que ces solutions sont représentées par des points à coordonnées entières appartenant à l'intérieur d'un quadrilatère"*).

Parmi les neuf groupes, deux ont choisi d'abord d'associer les effectifs de passagers et les poids de bagages à 2 axes des ordonnées. L'un d'eux abandonnera assez vite cette représentation, dans laquelle il n'avait pas sû trouver comment distinguer les deux types d'avions. L'autre la gardera jusqu'à la donnée de la solution (Cf Annexe II). Il orientait l'axe des abscisses dans un sens pour x et dans un autre pour y , avec deux origines à l'extrêmité de ses graduations ; il représentait alors les 4 fonctions linéaires du type $x \rightarrow 200x$ par des droites qui avaient l'avantage de se couper en des points auxquels ses membres ont pu attribuer des propriétés abusives, mais retenant leur attention, car ils étaient alors que convaincus que ce sont des intersections de droites qui leur donneraient la solution.

Un troisième groupe (le plus faible) a repéré sur chacun des deux axes les données relatives à chacun des types d'avions ne retenant que les nombres correspondants et oubliant ainsi la différence de nature de ces données.

Les six autres groupes ont envisagé d'emblée des axes corrects, plus, peut-être parcequ'ils ont fait jouer un automatisme lié aux lettres x et y, que par réelle réflexion.

VII- CONCLUSION

Cette observation montre plutôt l'élève en situation d'échec devant le problème proposé.

L'analyse de propos des élèves nous a conduit à considérer des phénomènes relativement différents de ceux que nous avions prévus et des objectifs poursuivis : essayer de montrer les processus cognitifs en jeu quand on propose à l'élève de travailler sur un problème où interviennent trois représentations possibles des notions impliquées.

Malgré les difficultés rencontrées, les propos des élèves ont été d'un grand intérêt. Ils nous ont permis de considérer :

- l'organisation des données d'un problème par les élèves en fonction de la formulation des questions ;
- l'usage fait par l'élève des notations mathématiques ;
- l'interprétation de l'énoncé et des questions, en fonction de ce que l'élève ressent comme nécessaire de chercher ;
- et, plus généralement, la résistance à abandonner les méthodes arithmétiques pour utiliser une méthode algébrique pourtant imposée par l'énoncé des questions.

Notre objectif actuel est de poursuivre ce travail sur l'initiation à l'algèbre. Il paraît intéressant de continuer à chercher en quoi ce type de problème peut aider l'élève à assimiler les concepts en jeu. La représentation graphique présente-t-elle des problèmes conceptuels qui lui sont propres ? (notions de droites, d'alignement de points, de graduation régulière ...). La représentation graphique par l'élève, comprise en relation avec :

- la situation "concrète"
- les relations mathématiques

lui permet-elle l'assimilation des concepts en jeu ?

ANNEXE 1 : ENONCE DU PROBLEME

UN PONT AERIEN (d'après une idée d'Emma CASTELNUOVO, manuel de Seconde, Ed.CEDIC, 1981).

On veut transporter 1 600 personnes et 90 tonnes de bagages. Deux types d'avions sont disponibles : 12 du type A et 9 du type B.

Ceux du type A peuvent transporter, au plus 200 personnes et 6 tonnes de bagages ; ceux du type B peuvent transporter au plus 100 personnes et 15 tonnes de bagages.

On désigne respectivement par x et y les nombres d'avions de type A et B qui pourront être choisis.

1) Ecrire toutes les relations mathématiques traduisant cette situation à l'aide du signe $\leq$ et des entiers naturels x et y.

Cette première partie est la seule lisible au cours de la première demi-heure

2) Représenter dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble S des solutions du système d'inéquations trouvé au 1°).
(On remarquera que les solutions sont représentées par des points à coordonnées entières appartenant à l'intérieur d'un quadrilatère).

La location d'un avion du type A revient à 4 Millions de Francs, celle d'un avion de type B revient à 1 Million.

3) Donner l'expression du coût de l'opération en fonction des nombres x et y. On notera ce coût $C(x\,;y)$, puisqu'il est l'image par une fonction C de deux variables x et y : $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

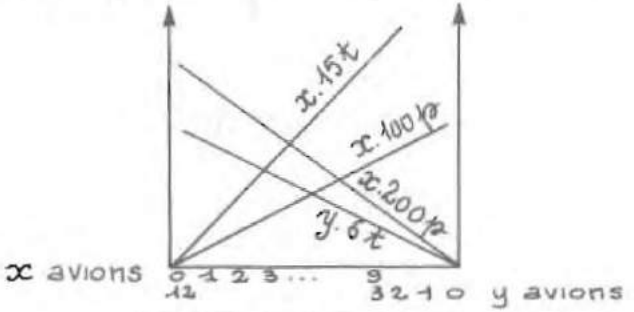
$$(x\,;y) \to C(x\,;y) = z$$

4) Représenter la droite D_4, d'équation $4x + y = 4$, correspondant à un côut de 4 Millions de Francs, puis la droite D_{45} d'équation $4x + y = 45$ correspondant à un coût de 45 Millions de Francs. D'une manière générale, que dire de la pente des droites D_z d'équation $4x + y = z$, correspondant à z Millions de Francs ? Et qu'indique l'ordonnée à l'origine de ces droites ? (c'est-à-dire l'ordonnée de l'intersection de chaque droite avec l'axe des ordonnées).

On cherche, bien sûr, le coût minimum C_m de l'opération. La droite d'équation $4x + y = C_m$ doit donc passer par un point à coordonnées entières appartenant à l'intérieur du quadrilatère du 2°), et avoir une ordonnée à l'origine minimum. Quelles sont les coordonnées de ce point ? (On ne demande pas de démonstration mais une simple observation de la figure). En déduire les nombres d'avions x et y correspondant au coût minimum C_m que l'on calculera.

ANNEXE 2

SCHEMA PROPOSE PAR UN GROUPE D'ELEVES



BIBLIOGRAPHIE

DOUADY R., 1985 *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques; une réalisation dans tout le cursus primaire* .Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII.

PIAGET J., 1975.*L'équilibration des structures cognitives* .Etudes d'Epistémologie génétique , XXXIII, P.U.F. Paris.

VERGNAUD G., 1981.*L'enfant, la mathématique et la réalité.*
Coll. Exploration recherche en sciences de l'Education. Peter Lang.

VERGNAUD G., 1987. *Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles; Problèmes épistémologiques et didactiques* in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Ed. La pensée Sauvage, 1988, Paris.