Didactique

Problèmes de dénombrement

André Antibi
IREM de TOULOUSE

Dans cet article , on va étudier un type de problème que l'on rencontre dès le Lycée : les problèmes de dénombrement.

Cet article constitue le chapitre 5 de ma thèse d'état *"Etude sur l'enseignement de Méthodes de Démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions"*, soutenue en Juin 1988 à Toulouse.

Précisons que ce sont des problèmes dans lesquels il s'agit de calculer le nombre d'éléments d'un certain ensemble E fini. Ces problèmes peuvent être très variés. Indiquons quelques exemples usuels ; dans ce qui suit, tous les ensembles sont supposés finis.

1 - Nombre d'éléments de AxB.
2 - Nombre de parties d'un ensemble de n éléments.
3 - Nombre de parties à p éléments d'un ensemble contenant n éléments.
4 - Nombre d'applications de A dans B.
5- Nombre d'applications injectives de A dans B.
6- Nombre de tiercés dans l'ordre, dans le désordre.
7- Nombre de mots différents pouvant être écrits à partir d'un certain ensemble de lettres.
8- Nombre de diagonales d'un polygone de n côtés.
9- Nombre de paquets de cinq cartes (dans un jeu de cartes) vérifiant une certaine condition.
10- Nombre de tirages différents de trois boules dans une urne contenant quatre boules blanches et six boules noires.

On voit sur ces exemples que la nature des éléments de E est très variable: dans l'exemple 1, les éléments de E sont des couples, dans les exemples 2 et 3, ce sont des parties, dans les exemples 4 et 5, des applications. Dans les exemples suivants, ce sont successivement des tiercés, des mots, des diagonales, des paquets de cartes, des tirages de boules.

Usuellement, les exemples 1, 2, 3, 4 et 5 font l'objets de théorèmes de cours.

Malgré cette diversité apparente, il m'avait toujours semblé, depuis l'époque où j'étais étudiant, que ces problèmes avaient au moins deux points communs:

1 : Très souvent, on n'est pas sûr de son résultat.

2 : Ils sont souvent difficiles.

Le second point, contrairement au premier, n'est pas spécifique à ce genre de problème.

Nous allons voir que la grande majorité des enseignants et des étudiants semblent d'accord sur ces deux points. Je commencerai d'abord par indiquer et commenter les résultats d'un test proposé à des enseignants du secondaire et du supérieur, et à des étudiants. Je proposerai ensuite des explications pour chacun des deux points précédents. Enfin, je ferai quelques suggestions concernant l'enseignement de ce type de problème.

EXPERIMENTATION : *PRESENTATION ET RESULTATS DU TEST*

A - TEST PROPOSE

Voici l'énoncé du test qui va être étudié:

Quel est le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de $(n+1)$ éléments dans un ensemble de n éléments ?

Il y a plusieurs solutions possibles. On peut, par exemple, procéder ainsi: Soit $E=\{a_1, a_2,...,a_{n+1}\}$ l'ensemble de départ et $F=\{b_1, b_2,...,b_n\}$ l'ensemble d'arrivée. Une application f de E dans F est surjective si et seulement si un élément et un seul de F admet deux antécédents et si tous les autres en admettent un. Il y a n manières possibles de choisir un élément b_i de F. Pour chacun de ces choix, il y a C_{n+1}^2 manières de choisir deux éléments

a_k et a_l de E ayant comme image b_i . Il reste alors à définir la restriction de f à E privé des éléments a_k et a_l . Cette restriction est une bijection d'un ensemble à $(n - 1)$ éléments dans un ensemble à $(n - 1)$ éléments. Il y a donc $(n - 1)!$ manières de définir une telle restriction. En définitive, le nombre cherché est donc : $n \cdot C_{n+1}^{2} \cdot (n - 1)!$, ou encore, $\dfrac{(n+1)!\,n}{2}$.

On peut remarquer que cette démonstration utilise uniquement des résultats classiques.

B-Précisions sur le déroulement des séances d'expérimentation

Ce test a été proposé à 55 enseignants (20 du supérieur et 35 de lycées), et à 37 étudiants : 18 étudiants préparant le CAPES de mathématiques, 11 étudiants de DEUG, 5 élèves de Mathématiques Supérieures et 3 élèves d'une grande école d'ingénieurs de Toulouse : l'ENSAE (souvent appelée SUP AERO).

Cette expérimentation s'est, en général, déroulée de la manière suivante : distribution d'une feuille contenant l'énoncé et sur laquelle je demandais de répondre, en précisant que l'on utilise la feuille comme brouillon.

Pour 29 enseignants de lycée, il en a été autrement : dans deux stages IREM différents, l'un de 16 enseignants, l'autre de 13, j'ai demandé aux stagiaires de chercher l'exercice. J'ai ensuite demandé à chacun d'eux d'indiquer oralement sa réponse (s'il en avait une), et d'expliquer sa démonstration ; je notais au fur et à mesure, au tableau, les diverses réponses et le type de méthode utilisée.

Enfin, pour les 5 élèves de Math-Sup, ils ont effectué leurs recherches en ma présence, au tableau ; trois dans le cadre d'une colle orale portant sur la combinatoire; quant aux deux autres, deux excellents élèves (l'un d'eux a obtenu un accessit au Concours Général de Mathématiques), je souhaitais me rendre compte de leur comportement face à ce type de problème.

Pour les 20 enseignants du supérieur, l'expérimentation s'est effectuée en 4 fois : un groupe de 9, deux groupes de 4, un groupe de 3.

Il en est de même pour les 35 enseignants de lycée : il y a eu un groupe de 16, un de 13, un de 4 et un de 2.

Quant aux étudiants, autres que les élèves de Math-Sup, il y a eu une séance pour chacun des groupes : étudiants de CAPES (18), étudiants de DEUG (11), élèves de SUP-AERO (3).

Pour les enseignants, les séances d'expérimentation auxquelles ils participaient, d'une durée totale d'une heure en moyenne, n'étaient pas exclusivement consacrées à ce test.

Pour terminer, signalons le point important suivant : toutes les personnes disposaient d'un quart d'heure, au minimum, pour répondre à ce test.

C-Résultats du test

ENSEIGNANTS				
	Supérieur (20)	Lycées (35)	Total (55)	Pourcentage
Réponse juste	3	6	9	16%
Pas de réponse	5	11	16	29%
Réponse fausse	12	18	30	55%

ETUDIANTS						
	CAPES (18)	DEUG (11)	MATH SUP (5)	SUP AERO (3)	Total (37)	Pourcen tage
Réponse juste	1	2	1	0	4	11%
Pas de réponse	5	3	0	1	9	24%
Réponse fausse	12	6	4	2	24	65%

Quelques commentaires :

◊ Le pourcentage de réponses justes est faible.

◊ La majorité des personnes proposent néammoins une réponse.

◊ Le nombre de réponses fausses est important, y compris chez les enseignants.

◊ Il n'y a pas de différence sensible entre les résultats des enseignants et ceux des étudiants. De plus, à l'intérieur de chacune de ces deux catégories, la nature des résultats ne semble pas liée au niveau d'étude des personnes.

◊ Précisons le point suivant concernant les 18 étudiants préparant le CAPES de Mathématiques. A la fin de la séance de test, qui eut lieu en février 1987, ils m'ont signalé qu'ils avaient dejà fait cet exercice en début d'année scolaire avec un autre enseignant : un seul a été en mesure de le refaire correctement.

◊ Le résultat faux que l'on rencontre le plus souvent est le suivant : $n\,(n + 1)!$. Il est proposé par 6 enseignants et 6 étudiants. On analysera en détail, dans le paragraphe suivant, une fiche de cette catégorie.

◊ Quelques personnes, 5 enseignants et aucun étudiant, ont eu l'idée d'établir une relation de récurrence pour résoudre cet exercice.

REACTIONS SIGNIFICATIVES D'ENSEIGNANTS ET D'ETUDIANTS.

A la fin des 7 séances d'expérimentation consacrées aux enseignants, une discussion sur les problèmes de dénombrement eut lieu. J'ai eu d'autre part trois entretiens sur cette question avec des étudiants : l'un avec deux excellents élèves de Math-Sup, un autre avec un groupe de trois élèves de Sup-Aéro. Ce dernier entretien a fait l'objet d'un enregistrement au magnétophone. Nous allons indiquer ici des points qui nous ont semblé particulièrement significatifs.

La première question que je posais immédiatement après ce test et avant de proposer une solution de l'exercice, était la suivante : *"Etes-vous sûrs de votre réponse ?"*.

Personne, y compris parmi les enseignants ne répondit "OUI". Dans le meilleur des cas, certains, peu nombreux, répondaient qu'ils étaient presque sûrs. Notons, par exemple, la réponse de l'élève de Math-Sup qui avait eu un accessit au Concours Général : *"Dans ce domaine, on n'est pas sûr de sa réponse"*. (Signalons, au passage, que sa réponse était juste).

Un élève de Sup-Aéro donne le point de vue suivant : *"Pour moi, dans ces problèmes, l'impression que j'avais c'est que c'était un peu au hasard"*.

Tous les enseignants interrogés étaient d'accord sur le point suivant : dans ce genre de problème, il est souvent très difficile de faire comprendre à un élève pourquoi il s'est trompé. Notons que ceci n'est pas surprenant dans la mesure où nous-mêmes, enseignants, ne sommes très souvent pas sûrs de notre réponse.

Les enseignants semblaient d'accord sur le point suivant : les élèves qui s'en sortent le mieux dans ce genre de problème ne sont pas forcément ceux qui, usuellement, sont les meilleurs. On peut relever, par exemple, des interventions d'enseignants telles que :

"Les meilleurs élèves ne se retrouvent pas"
"Certains trouvent la solution mais ne savent pas pourquoi"
"Là, on ne trie pas les bons élèves".

Un autre point qui semblait avoir l'assentiment de tous : en général, dans les problèmes de dénombrement, la solution tient en quelques lignes. Ce point, d'ailleurs, a pu être vérifié lors du dépouillement des tests : les solutions, justes ou fausses, étaient effectivement courtes. Et aucun enseignant n'a dit que, en présence d'élèves, il détaillerait davantage sa solution.

Je posais aussi la question suivante : *"A votre avis, qu'est-ce qui particularise la combinatoire ?"*. Pour beaucoup, la combinatoire est liée à un problème de modélisation. Indiquons d'autres réponses d'étudiants :

"On ne connaît pas le résultat"
"On n'a pas de support visuel : si, dans un exercice, on trouve 1500 au lieu de 1490, on ne peut pas contrôler"

Ce dernier étudiant, d'ailleurs, trouvait qu'une majoration d'intégrales, par exemple, était quelque chose de bien plus concret. Lorsque je lui dis que, pour certains, un jeu de cartes ou un tiercé pouvait être plus concret qu'un ... compact, il me répondit qu'il préférait avoir affaire à un compact, car, dans ce cas, il pouvait faire un petit dessin.

Ajoutons enfin un détail qui me semble assez bien traduire la réaction des enseignants et des étudiants vis-à-vis de ce genre de problème : lorsque, au cours d'une séance d'expérimentation avec un groupe de quatre enseignants, je leur ai dit qu'un test allait porter sur les problèmes de dénombrement, leur réaction fut unanime : ils soupirèrent et l'un d'eux, approuvé par les autres, s'écria : *"Oh! là là!"*.

Visiblement, comme le signalait un élève de Sup-Aéro, ces problèmes ont parfois un certain aspect un peu traumatisant.

COMMENT PEUT-ON EXPLIQUER UNE TELLE SITUATION ?

A-Introduction

Je vais proposer, dans ce paragraphe, des explications possibles d'une telle situation, et plus particulièrement du point suivant : *Pourquoi, très souvent, n'est-on pas sûr de sa réponse ?"*.

C'est ce point qui, à mon avis, est vraiment spécifique à ce genre de problème. Il arrive, bien sûr, dans d'autres domaines, que des enseignants aient des difficultés pour résoudre des problèmes. Mais alors, il est rare qu'ils proposent une solution fausse. Il n'en est pas ainsi dans les problèmes de dénombrement : les résultats du test l'indiquent nettement. Signalons d'ailleurs que la première fois que j'avais dû résoudre cet exercice(*) j'avais proposé sans certitude une solution fausse, comme la majorité de mes collègues. Essayant de comprendre pourquoi il en était ainsi, je me suis rendu compte que, certainement par tradition, les solutions de ces problèmes étaient données de manière particulièrement succinte et qu'alors, il était difficile de contrôler sa solution . Je me suis astreint, pour la première fois dans ma carrière d'enseignant, à rédiger la solution de l'exercice proposé précédemment avec un niveau de rigueur comparable à celui qui est usuellement demandé dans les autres domaines des Mathématiques : la solution ne tient alors plus en quelques lignes ; elle nécessite deux pages environ, comme on va le voir.

B.Exposé d'une solution détaillée.

Rappelons d'abord deux propriétés essentielles qui sont très souvent utilles dans ce genre de problème :

1 - *Deux ensembles finis en bijection ont même cardinal.*

Il suffit donc, pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini E, de déterminer une bijection de E sur un ensemble dont on connaît le cardinal.

2 - *Si $(E_i)_{i\in I}$ est une partition d'un ensemble fini E*

Alors : $\text{Card } E = \sum_{i\in I} \text{Card } E_i$

(*) Mon fils était alors élève de Math-Sup et avait eu cet exercice en Colle ; il m'avait demandé de le refaire avec lui ; il ne se souvenait plus très bien de la solution.

Dans le cas où on est en mesure d'évaluer le cardinal des E_i, on en déduit le cardinal de E ; sinon on peut être amené à chercher une partition plus fine de E en déterminant une partition de chaque E_i, et ainsi de suite.

Considérons alors l'exercice proposé, et notons, comme dans la solution proposée précédemment :

$$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\} \quad \text{et} \quad F = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

Les idées qui ont été utilisées dans la démonstration que nous avons donnée pourraient donner lieu à la démonstration suivante :

Notons S l'ensemble des surjections de E dans F.

1-Une application de E dans F est surjective si et seulement si un élément et un seul de F admet deux antécédents et si tous les autres en admettent un seul.

2-Posons, pour $j = 1,2,\ldots,n$,
$S_j = \{s \in S : b_j$ a deux antécédents $\}$
Alors $\{S_j : j = 1,2,\ldots,n\}$ est une partition de S.

3-Soit P_2 l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,n+1\}$ contenant deux éléments, on pose, pour tout $\{k, l\}$ de P_2:
$S_j^{k,l} = \{s \in S_j : s(a_k) = s(a_l) = b_j\}$
Alors, pour chaque $j = 1,2,\ldots,n$, $\{S_j^{k,l} : \{k, l\} \in P_2\}$ est une partition de S_j.

4-Notons B l'ensemble des bijections de l'ensemble E privé de a_k et a_l dans l'ensemble F privé de b_j.
Alors $S_j^{k,l}$ et B ont même cardinal.

5-On peut alors en déduire le cardinal de S.

Il me semble important de détailler ces différentes étapes pour bien se rendre compte à quel point les solutions proposées usuellement sont "raccourcies".

1-Pour toute application f de E dans F, on a :

$$\text{Card } E = \sum_{i=1}^{n} \text{Card } f^{-1}\{b_i\} \qquad (1)$$

car les $f^{-1}\{b_i\}$ constituent une partition de E.

Notons $N_i = \text{Card } f^{-1}\{b_i\}$. Avec cette notation, il est clair que l'on a : f surjective $\Leftrightarrow \forall i = 1,2,\dots,n, \quad N_i \geq 1$

Or, d'après (1), $\sum_{i=1}^{n} N_i = n + 1$.

Par suite, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective est que l'un des N_i soit égal à 2 et que tous les autres soient égaux à 1. La condition nécessaire et suffisante de cette première étape est donc établie.

2-Cette étape se déduit immédiatement de la précédente.

3-Il s'agit de vérifier que :

a) $\bigcup_{\{k,l\} \in P_2} S_j^{k,l} = S_j$

b) $S_j^{k,l} \cap S_j^{k',l'} = \varnothing$ si $\{k, l\} \neq \{k', l'\}$

Le a) se vérifie immédiatement à partir de la définition même de S_j. Quant au b), on peut raisonner par l'absurde. Supposons que $\{k, l\} \neq \{k', l'\}$ et que $S_j^{k,l} \cap S_j^{k',l'} \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe un élément s_0 appartenant à $S_j^{k,l}$ et à $S_j^{k',l'}$. Si les sous-ensembles $\{k, l\}$ et $\{k', l'\}$ sont distincts, un élément au moins de l'un n'est pas élément de l'autre ; on a, par exemple $k \neq k'$ et $k \neq l'$.

s_0 appartient à $S_j^{k,l} \cap S_j^{k',l'}$; on a donc : $s_0(a_k) = s_0(a_{k'}) = s_0(a_{l'}) = b_j$. b_j aurait donc trois antécédents distincts. Il est clair alors que le cardinal de l'ensemble s (E) serait inférieur ou égal à $(n - 1)$ et que s ne serait pas surjective.

4-Pour démontrer que $S_j^{k,l}$ et B ont même cardinal, il suffit de déterminer une bijection de B sur $S_j^{k,l}$. Associons à chaque b de B l'application s de E dans F dont la restriction à $E \setminus \{a_k, a_l\}$ est égale à b et telle que $s(a_k) = s(a_l) = b_j$. Il est immédiat de vérifier que s est surjective et que s appartient à $S_j^{k,l}$. On définit donc ainsi une application de B dans $S_j^{k,l}$. Notons la φ. Démontrons que φ est bijective.

Soit $s \in S_j^{k,l}$. Démontrons que s admet un antécédent unique b dans B. Si b existe, alors on a $\varphi(b) = s$ et b est nécessairement égal à la restriction de s à l'ensemble $E \setminus \{a_k, a_l\}$. s admet donc **au plus** un antécédent. Un tel élément b est effectivement un antécédent de s ; en effet, b appartient à B car la restriction de s à $E \setminus \{a_k, a_l\}$ est une application surjective d'un ensemble de $(n-1)$ éléments dans un ensemble de $(n-1)$ éléments, à savoir $F \setminus \{b_j\}$: c'est donc une bijection. De plus, on a bien $\varphi(b) = s$ (immédiat).

5-On sait que Card B = $(n-1)!$ Donc il en est de même pour le cardinal de chaque $S_j^{k,l}$. Or les $S_j^{k,l}$ constituent une partition de E. Il y a n ensembles S_j et chacun d'eux contient C_{n+1}^2 sous-ensembles $S_j^{k,l}$. Il y a donc en tout $\left(n.C_{n+1}^2\right)$ sous-ensembles $S_j^{k,l}$. On a donc en définitive :

$$\text{Card } S = n.C_{n+1}^2.(n-1)!$$

Remarque : Si on essayait de rédiger de manière détaillée et rigoureuse d'autres exercices classiques de combinatoire, relatifs par exemple à des paquets de cartes ou à des mots pouvant être écrits dans certaines conditions, on se rendrait compte que leur solution est souvent bien plus longue et bien plus délicate qu'il n'y paraît.

C. Pourquoi n'est-on souvent pas sûr de sa réponse ?

Je dois dire que, parmi les enseignants et les étudiants qui ont passé le test, aucun ne pensait que la résolution d'un tel exercice pouvait être détaillée ainsi. Avant de me pencher vraiment sur la résolution de ce genre de problème, j'étais, moi aussi, bien loin de me douter qu'il pouvait en être ainsi ; et j'ai toujours donné aux élèves des solutions courtes.

Remarquons que, bien sûr, il y a d'autres solutions : on peut, par exemple en notant s_n le nombre cherché, établir une formule de récurrence entre s_n et $s_n - 1$. Cette formule n'est pas simple à établir et elle nécessite un soin particulier. Quoi qu'il en soit, toutes les solutions nécessitent une rédaction nettement plus longue et plus précise que celle que l'on donne usuellement.

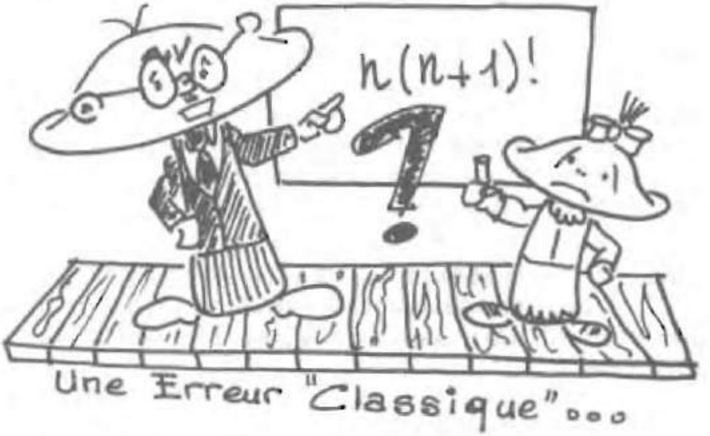
En considérant la longueur de la démonstration précédente, et le nombre d'étapes et de justifications qu'elle nécessite, on peut comprendre pourquoi il est très difficile de contrôler une solution qui tient en quelques lignes et dans laquelle on ne justifie pratiquement rien. On a donc là un élément de réponse à deux questions signalées précédemment :

1 - Dans ces problèmes, on est rartement sûr de sa réponse.
2.- Les enseignants ont souvent du mal à faire comprendre aux élèves leurs erreurs.

Ceci va être illustré dans l'analyse détaillée d'une solution fausse.

D-Analyse d'une erreur très classique.

Nous allons reproduire intégralement puis analyser une solution fausse, proposée par un enseignant du Supérieur, et aboutissant au résultat faux le plus fréquemment rencontré : $n\,(n+1)!$(**)



Une Erreur "Classique"...

(**) Il est assez surprenant de constater que les personnes qui ont proposé cette solution n'ont pas eu l'idée de vérifier leur réponse pour $n = 1$. Ils se seraient ainsi rendu compte de leur erreur.

Solution :

$$\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = E \xrightarrow{f} F = \{y_1, \dots, y_n\}$$

a) f est une bijection d'une partie A de E à n éléments sur F
b) nombre de bijections de A sur F = n !
c) nombre de parties à n éléments de E = $C_{n+1}^{n} = n + 1$
d) l'élément restant a n possibilités

Dans cette solution, les étapes b), c), d) sont justes. L'étape a) aussi, malgré une petite imprécision, sans importance, dans la formulation ; on pourrait, par exemple, écrire cette étape ainsi :

> f est une surjection de E dans F si et seulement si il existe un sous-ensemble A de E, de cardinal n, tel que la restriction de f à A soit une bijection de A sur F.

Pourquoi le résultat est-il faux ? On va essayer de répondre à cette question de manière assez précise.

Notons, comme précédemment, S l'ensemble des surjections de E dans F et, pour toute partie A de E de cardinal n , notons :

$$S_A = \{s \in S : s/A \text{ bijection de A sur F}\}$$

(s /A désignant la restriction de s à A)

On peut vérifier aisément que tous les S_A ont un cardinal égal à $n\,!n$; d'autre part, il est clair qu'il y a dans E (n +1) parties A de cardinal n . Or, quand on écrit, comme dans la solution ci-dessus,

$$\text{Card } S = (n + 1).\text{Card } S_A = (n + 1).n\,!\,n \;,$$

ce serait correct si et seulement si les S_A constituaient une partition de S ; or ceci est faux, car tout s de S appartient à deux S_A. En effet :
soit $s \in$ S. On peut vérifier, comme on l'a vu précédemment, qu'il existe un élément unique de F, y_j , qui admet deux antécédents, x_k et x_l . Si on pose

$$A_1 = E \setminus \{x_k\} \quad \text{et} \quad A_2 = E \setminus \{x_l\},$$

il est clair que s appartient à la fois à S_{A_1} et à S_{A_2} , et qu'il n'appartient à aucun autre S_A. Ainsi, en faisant la somme des cardinaux des S_A, on obtient le double du cardinal de S. On retrouve alors la bonne réponse en divisant le résultat proposé par 2.

Ce type d'erreur se retrouve très fréquemment dans les problèmes de dénombrement :

A un certain moment de la démonstration, on utilise une propriété d'additivité d'une partition pour un ensemble de parties qui n'en est pas une.

Sur cet exemple, on comprend mieux pourquoi il est souvent difficile d'expliquer une erreur, à partir d'une solution aussi succinte : tout était juste sauf la dernière ligne indiquant le résultat. En d'autres termes, on n'est pas en mesure de relever une erreur de raisonnement explicitement écrite : il n'y en a pas. Ainsi, on est obligé en quelque sorte d'imaginer la cause de l'erreur qui a été commise avant de pouvoir corriger cette erreur. Signalons d'ailleurs que, dans certaines fiches contenant une réponse fausse, je n'ai pas été en mesure de faire une analyse aussi précise de l'erreur commise.

Que fait-on usuellement pour faire comprendre une erreur de ce type à un élève ? La grande majorité des professeurs que j'ai interrogés à ce sujet (et moi-même d'ailleurs), essaient de lui faire sentir, s'ils le peuvent, qu'avec sa méthode il a compté certains éléments plusieurs fois. Ce n'est souvent pas facile si l'on ne prend pas la peine d'expliciter, comme ci-dessus, le déroulement de la démonstration.

E.Pourquoi ces problèmes sont-ils souvent difficiles ?

On peut d'abord faire une remarque sur le mot "difficile". En ce qui me concerne, je considère que la notion de difficulté, en pédagogie, est une notion un peu vague qui ne peut avoir de sens que d'un point de vue statistique. Plus précisément, en ce qui concerne l'exercice du test par exemple, cinq enseignants sur six n'ont pas su le résoudre : l'exercice est donc difficile.

La solution proposée pour cet exercice, qu'elle soit détaillée ou non, nécessite plusieurs étapes. Or, dans ce genre de problème, par pure tradition à mon avis, on indique rarement la marche à suivre et, bien évidemment, ceci ne peut que les rendre plus difficiles. On peut se rendre compte aisément que, dans d'autres domaines des mathématiques, on indique très souvent, dans les énoncés de problèmes, des étapes intermédiaires plus simples que celles qui interviennent dans les problèmes de dénombrement. Ainsi, par exemple, la première étape de la solution que nous avons proposée peut sembler assez naturelle : il n'en est rien. L'examen des fiches de tests montre qu'il n'y a qu'un petit nombre d'étudiants et d'enseignants qui ont eu l'idée d'aborder le problème ainsi. Parmi ceux qui n'ont pas donné de réponse, beaucoup n'ont pratiquement pas démarré.

En définitive, une des raisons essentielles de la difficulté de ce genre de problème est toute simple : **on les pose très souvent de sorte qu'ils** soient difficiles. Une difficulté de ce type n'est donc pas liée à la nature même des problèmes de dénombrement ; elle est due à une tradition de notre système éducatif.

Par tradition aussi, on indique très rarement la réponse dans ce genre de problème. Soulignons que, même si on indiquait le résultat, ce genre de problème, souvent, ne serait pas bien plus facile pour autant. Dans ce cas, on aurait bien sûr la possibilité de savoir si son résultat est juste. On travaille sur des ensembles finis, certes, mais on est rarement en mesure, dans ce genre de problème, d'expliciter et de compter un par un les éléments de l'ensemble dont on veut calculer le cardinal. De plus, comme le faisait remarquer un étudiant, on connaît rarement un ordre de grandeur assez précis du résultat.

Une autre difficulté, plus spécifique à ce genre de problème, est celle qui a été signalée par beaucoup d'enseignants et d'étudiants : la modélisation. Il est clair en effet que, avec des énoncés ne contenant aucune indication, il est souvent difficile de trouver un modèle mathématique permettant de traiter le problème.

Pour terminer, on est peut-être en mesure de comprendre pourquoi les élèves usuellement bons ne sont pas toujours les meilleurs dans ce domaine. En effet, compte tenu de la situation décrite ci-dessus, la résolution d'un problème de dénombrement nécessite des qualités d'un genre assez particulier : on se contente d'une justification très sommaire et on fait peu de démonstrations détaillées de type classique. Ainsi, on s'en sort le plus souvent en s'inspirant d'exercices déjà vus, par simple mimétisme. Dans un tel contexte, des qualités telles que la rigueur par exemple, sont beaucoup moins utiles dans ce domaine que dans les autres branches des mathématiques.

CONCLUSION

Il ressort clairement des résultats du test et des entretiens avec les professeurs et les étudiants que les problèmes de dénombrement occupent une place très particulière dans notre enseignement. Comme le signalait un élève de Sup-Aéro, ce domaine fait un peu penser à un jeu de hasard : on donne souvent une réponse en sachant qu'on n'en est pas vraiment sûr. A ce sujet, on l'a vu , les réactions des enseignants sont tout à fait analogues à celles des étudiants.

La rédaction rigoureuse des solutions de ces problèmes doit être toute autre que celle qui est utilisée usuellement. D'un autre côté, si on s'astreint à un niveau de rigueur comparable à celui que l'on demande dans les autres branches des mathématiques, ces problèmes risquent peut-être de devenir moins attrayants, car leur solution, bien plus longue, fait souvent appel à des outils abstraits, en théorie des ensembles notamment.

Une chose en tout cas me semble importante : quel que soit le type de démonstration qu'ils proposent à leurs élèves, les enseignants devraient être en mesure de rédiger des solutions détaillées et rigoureuses afin de pouvoir contrôler leur propre réponse. En plus, ceci pourrait leur permettre, d'une part d'avoir une idée plus précise de la difficulté du problème qu'ils posent, et, d'autre part, de mieux analyser les erreurs commises par leurs élèves.

Doit-on proposer aux élèves des solutions détaillées et rigoureuses ? Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de le faire toujours. Il serait cependant souhaitable que les élèves aient conscience du type de démonstration qu'il faudrait faire et qu'ils indiquent de manière bien plus précise les diverses étapes de leur raisonnement, même s'ils ne détaillent pas complètement certaines d'entre elles.

La difficulté de ce type de problème provient en grande partie de la manière dont ils sont posés : on donne très rarement la marche à suivre. Il n'est alors pas surprenant que, si on n'a pas vu auparavant des exercices analogues, la résolution soit souvent difficile. Cette situation n'est pas du tout spécifique à ce domaine des mathématiques.

Doit-on systématiquement indiquer la marche à suivre dans ce genre de problème ? Je ne le pense pas car la recherche d'une méthode de résolution peut être très enrichissante. Cependant, au cours d'une évaluation, nous devrions être plus prudents et ne pas oublier que nous-mêmes éprouvons des difficultés en présence de certains problèmes et qu'il nous arrive souvent de nous tromper.

Pour en savoir plus :

Maurice GLAYMAN : *Un aspect de la Combinatoire*
Bulletin n°277, 1971.