Bulletin de l'APMEP n°373 - Avril 1990

La Capitalisation

Maurice Glaymann
I.R.E.M. de Lyon

1 - Le crédit de la CAMIF

Dans son catalogue, Eté 88, la CAMIF propose des modalités de crédit. Voici la table donnat les mensualités constantes, calculées pour un crédit de 100 F en fonction de la durée (en mois de ce crédit).

durée	mensualité	coût du crédit
4 mois	25,7308	2,92
6 mois	17,3513	4,11
9 mois	11,7669	5,90
12 mois	8,9764	7,72
15 mois	7,3034	9,55
18 mois	6,1892	11,41
21 mois	5,3943	13,28
24 mois	4,7989	15,17
30 mois	3,9674	19,02

La CAMIF annonce avec ce tableau le taux de 13,95%.
Nous allons, en particulier dans cet article, justifier ce taux.

2 - Tableau d'amortissement

On emprunte C francs au taux T pendant p années, soit $n = 12p$ mois. Le taux mensuel est $t = T/12$.

Proposons-nous de calculer pour chaque mois le montant m des échéances fixes.

Le principe du crédit consiste à rembourser tous les mois une *mensualité constante*. comprenant, d'une part, *l'amortissement* et d'autre part, *l'intérêt de la dette*. Dès que la somme des amortissements couvre la dette, celle-ci est éteinte. La somme des intérêts alors versés est le coût du crédit J.

Au début du i ème mois, on désigne par b_i l'amortissement au i ème mois et a_{i+1} le capital restant dû. L'intérêt est $i_i = a_i t$ et la mensualité vaut $m = b_i + a_i t$. Au départ, $a_0 = C$ et d'autre part, par définition, $C = \sum_{i=1}^{n} b_i$ (1)

Ce qui donne le tableau d'amortissement :

Mois	Amortissement	Intérêt	Echéance	Capital dû
1	b_1	$i_1 = a_0 t$	$m = b_1 + i_1$	$a_1 = a_0 - b_1$
2	b_2	$i_2 = a_1 t$	$m = b_2 + i_2$	$a_2 = a_1 - b_2$
.....	.....	.....	.....	.....
n	b_n	$i_n = a_{n-1} t$	$m = b_n + i_n$	$a_n = a_{n-1} - b_n$

Au bout de n mois, la dette est éteinte donc le capital dû est nul : $a_n = 0$. D'autre part, comme les échéances sont fixes, on a

$b_1 + a_0 t = b_2 + a_1 t$ avec $a_1 = a_0 - b_1$ d'où $b_i = (1+t)^{i-1} b_1$.

De (1) on déduit : $C = \sum_{i=1}^{n} b_i = \left[1 + (1+t) + \ldots + (1+t)^{i-1}\right] b_1$.

D'où : $$b_1 = \frac{Ct}{(1+t)^n - 1} \qquad (2)$$

d'où finalement $$m = \frac{Ct(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}.$$

Pour calculer le coût du crédit J, sommons la colonne des échéances, il vient $mn = C + J$, d'où $J = nm - C$.

Application numérique : $C = 100$ F, $T = 13{,}95\%$ et $n = 4$ mois.

Le taux mensuel vaut $t = 0{,}011\,625$, d'où $b_0 = 24{,}568\,2$ et $a_0 = 1{,}162\,5$

Il en résulte que $m = 25{,}730\,8$, c'est la valeur annoncée par la CAMIF.

Dans ce cas, le coût du crédit s'élève à $J = 4m - C = 2{,}923\,2$ F, ce qui semble peu cher, compte-tenu du taux de 13,95% ...

Etudions alors ce qui se passe si nous empruntons *la même somme, au même taux*, mais pour une durée de 10 ans.

Ici, $n = 120$ et $b_0 = 0{,}387\,2$ et $a_0 = 1{,}162\,5$, d'où $m = 1{,}549\,6$.

Le coût du crédit $J = 120m - C = 85{,}959\,1$ Fest supérieur à 85% de la somme empruntée ! Comme quoi, il faut toujours se méfier des apparences ... et du capitalisme !

3 - Calcul du taux

Proposons-nous de calculer t en fonction du capital C emprunté, du montant m des mensualités et du nombre n de mensualités.

Compte-tenu de (2) et de $b_0 = m - Ct$ et en posant $u = 1 + t$, il vient, pour $u \neq 1$, donc $t \neq 0$, $Cu^{n+1} - (C+m)u^n + m = 0 \qquad (3)$
équation de degré $n+1$ en u, qui admet la racine évidente 1.

Etudions la fonction $f : u \to Cu^{n+1} - (C+m)u^n + m$ sur R

La dérivée est $\quad f'(u) = \left[(n+1)Cu - n(C+m)\right]u^{n-1}$

On en déduit $\quad f'(0) = 0\,,\ f'(1) = C - nm = -J$

Par définition du capitalisme J est positif, donc $f'(1) < 0$.

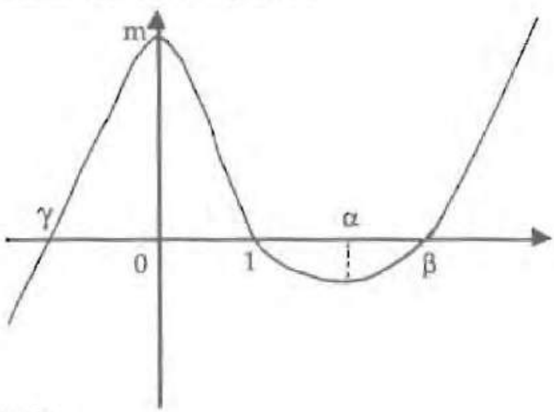
f' s'annule pour $a = \dfrac{n(C+m)}{C(n+1)}$ et comme $nm > C$, on a $a > 1$.

D'où les tableaux de variation de f, selon la parité de n :

• Pour n pair :

x	$-\infty$		γ		0		1		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	¦	$-$	0	$-$	¦	$-$	0	$+$	¦	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	m	↘	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

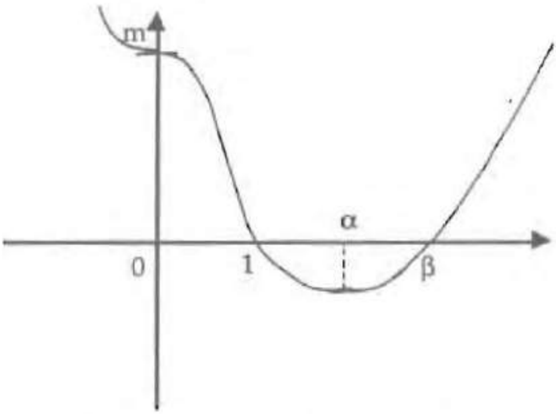
Il y a trois racines réelles : $\gamma < 0$, 1 et β



• Pour n impair

x	$-\infty$		0		1		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	¦	$-$	0	$+$	¦	$+$	
f	$+\infty$	↘	m	↘	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

Il y a deux racines réelles 1 et β.



Ainsi, la fonction f s'annule pour une valeur b supérieure à a donc supérieure à 1. Le problème consiste à calculer cette racine b.

En posant $k = \dfrac{m}{C}$, on peut écrire l'équation sous la forme :

$$u = (1 + k) - \frac{k}{u^n}$$

d'où l'algorithme de calcul : $u_p = (1 + k) - \dfrac{k}{u_{p-1}^n}$.

Voici une application numérique : déterminons le taux d'un emprunt de 205 000 F, durant 10 ans, sachant que les mensualités sont de 2 800,72 F. L'algorithme prend la forme :

$$u_p = 1{,}013\,662\,048 - \frac{0{,}013\,662\,048}{u_{p-1}^{120}}$$

Ici, $a = 1{,}005\,284\,677$; prenons $u_0 = 1{,}005\,3$.

On a successivement :

$u_1 = 1{,}006\,417\,123$	$u_2 = 1{,}007\,321\,107$	$u_3 = 1{,}007\,968\,753$
$u_4 = 1{,}008\,391\,358$	$u_5 = 1{,}008\,649\,922$	$u_6 = 1{,}008\,801\,775$
$u_7 = 1{,}008\,888\,786$	$u_8 = 1{,}008\,937\,934$	$u_9 = 1{,}008\,965\,469$
$u_{10} = 1{,}008\,980\,810$	$u_{11} = 1{,}008\,989\,366$	$u_{12} = 1{,}008\,996\,411$
$u_{13} = 1{,}008\,996\,746$	$u_{14} = 1{,}008\,998\,204$	$u_{15} = 1{,}008\,999\,014$
$u_{16} = 1{,}008\,999\,463$	$u_{17} = 1{,}008\,999\,712$	$u_{18} = 1{,}008\,999\,985$

$u_{19} =$ 1,008 999 927 $u_{20} =$ 1,008 999 970 $u_{21} =$ 1,008 999 993
$u_{22} =$ 1,009 000 006 $u_{23} =$ 1,009 000 013 $u_{24} =$ 1,009 000 017
$u_{25} =$ 1,009 000 019 $u_{26} =$ 1,009 000 021 $u_{27} =$ 1,009 000 022
$u_{28} =$ 1,009 000 022.

Le processus converge lentement vers b = 1,009 000 022.

Ce qui donne t = 0,009 000 022 et T = 10,800 026 4 soit environ T =10,80%.

Billancourt-sur-Essonne
27 août 1988