Echanges

La détermination des décimales de π

Daniel Saada
Rambouillet

1 - Nous partons d'un développement de Arctan, inhabituel mais rapide, dû à EULER :

$$\text{Arctan } t = \frac{t}{1+t^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 + \ldots\right].$$

(Numéro Spécial π, pages 106 et 107).

2 - En faisant $t = 1$: $\pi = 2 + \sum_{n\geq 1} u_n$, avec $u_n = \dfrac{2(n\,!)}{3\times 5\times \ldots\times(2n+1)}$.

3 - L'entier n étant fixé, on programmera le calcul de $S_n = 2 + \sum_{1}^{n} u_k$ au moyen de l'algorithme de HORNER, très économe en opérations . En BASIC

```
10 S = 2
20 FOR I = N TO 1 STEP - 1
```

```
30 S = S * I / (2 * I + 1) + 2
40 NEXT I
```

4 - Les décimales de π sont, jusqu'à un certain rang, les décimales de S_n. On effectuera donc la multiplication de S par I, et la division par (2I + 1) avec un grand nombre p de chiffres, choisi par l'utilisateur. En arrondissant les divisions à l'entier inférieur, le décimal D_n obtenu vérifiera $S_n - D_n < 10^{-p+1}$.

5 - On choisit n tel que $\pi - S_n < 10^{-p+1}$. Pour ce faire, il faut disposer grâce à $\pi - S_n < \dfrac{4}{\sqrt{n+1}\,.\,2^{n+1}}$ d'une majoration assez fine du reste de la série (2-). On aura en définitive : $\pi - D_n < 10^{-p+1} \times 2$, soit une erreur d'une unité au plus par défaut sur la $(p-1)^{\text{ème}}$ décimale de π.

6 - ***Quelques résultats du programme !***

nombre p de chiffres désirés	Nombre N d'itérations	Chiffres obtenus
10	29	31415 92652
20	62	58979 32384
30	95	62643 38327

Pour contrôler :

π = 3,1415 92653 58979 32384 62643 38327
95028 84197 16939 93751 05820 ...

7 - N étant (asymptotiquement) proportionnel à p, le volume total du calcul est environ proportionnel à p^2. Vérifiez en minutant le temps de calcul.

8 - L'ouvrage de base sur π est évidemment le numéro *Spécial* π, édité en Mai 1980 par *Le Petit Archimède*. Pour les opérations en grande précision, consulter mon ouvrage *Entrée en Terminale C.D.E. avec un micro-ordinateur* (Belin), pages 110 et 111.

Programme de l'algorithme décrit :

```
  5   A(0) = 20 000
 10   FOR I = N TO 1 STEP -1
      15    R = 0                (Début de la multiplication de S par I)
      20    FOR J = D TO 1 STEP -1
      25    X = (A(J) * I + R) / 10^5
      30    A(J) = 10^5 *  FRAC(X)
      35    R = INT(X)
      40    NEXT J
 50   A(0) = A(0) * I + R      (Fin de la multiplication)
 60   R = 0 : K = 2 * I + 1    (Début de la division par 2I + 1)
 70   FOR J = 0 TO D
      75    X = A(J) + R * 10^5
      80    A(J) = INT(X / K)
      85    R = X -- A(J) * K
      90    NEXT J
100   A(0) = A(0) + 20000      (Fin de la division)
110   NEXT I                   (Fin de la boucle sur I)
120   Lecture des A(I), 0 ≤ I ≤ D.
```

Mode opératoire du programme.

1) Les chiffres de π sont obtenus par blocs de 5, l'ordinateur devant calculer juste sur 10 chiffres. Si la capacité n'est que de 8 chiffres, adapter le programme : remplacer 20 000 par 2000 (lignes 5 et 100) et 10^5 par 10^4 (lignes 25, 30, 75).

2) Le nombre p de chiffres désirés est 5xD (ou 4xD) : Réserver et annuler A(0), A(1), ... , A(D).

3) Déterminer le plus petit entier n vérifiant $\dfrac{4}{\sqrt{n+1}\,.\,2^{n+1}} < 10^{-p+1}$ et stocker n dans la mémoire N.