Etudes

Le (nouveau) calcul infinitésimal

Introduction amicale à l'Analyse non Standard

André Deledicq
IREM de Paris VII

0 - AVERTISSEMENT ET PLAN DE L'ARTICLE.

Le lecteur qui voudrait aller plus loin dans l'apprentissage élémentaire de ce calcul pourra consulter *Leçons de calcul infinitésimal - André DELÉDICQ et Marc DIENER - 1989 - Collection U - Armand Colin & ACL-Editions.*

Pour une connaissance plus approfondie (niveau "maîtrise"), on lira ensuite *Analyse non-standard - Francine DIENER et*

Ce court article est écrit pour tous ceux qui entendent parler ici et là d'analyse non-standard (en abrégé A.N.S), sans pouvoir disposer d'un exposé à la fois cohérent et se voulant compréhensible, mais laissant de côté des aspects logiques, polémiques ou théologiques du sujet

Ayant conservé pour un exposé ultérieur les applications des concepts et des outils de l'A.N.S., notre parcours est ici articulé en quatre parties ci-dessous résumées.

Georges REEB - 1989 - Editions Hermann, et un recueil de communications sur la *Mathématique non-standard - 1989- édité sous la responsabilité de Hervé BARREAU et Jacques HARTHONG par le CNRS.*

On relira aussi avec intérêt l'article de *Georges REEB, Mathématiques non-standard (essai de vulgarisation)*,paru dans le *Bulletin n°328* pages 259 à 273 - 1981.

0-1. En Analyse, des expressions comme **nombres infiniment petits ou infiniment grands** sont bien pratiques et nous échappent parfois car elles **parlent à l'intuition** ; dans le passé, de grands mathématiciens (Euler et Cauchy, par exemple) ont utilisé ces mots, qu'ils ne savaient d'ailleurs pas remplacer par d'autres. On sait aujourd'hui les utiliser sans introduire de contradiction avec l'Analyse classique.

Dans cette première partie, nous donnerons quelques définitions et quelques démonstrations où l'introduction de ces nombres présente un avantage manifeste ; elles supposent simplement acceptées les propriétés souhaitées par les calculateurs et ici rappelées .

Notations et abréviations utilisées :

ip pour **infiniment petit,**
ig pour **infiniment grand** (positif ou négatif)
app pour **appréciable** c'est-à-dire "à notre échelle" (ni ip, ni ig).
Lorsque la différence x - y est ip, on note **x ≃y** et on lit **x est infiniment voisin de y** (en abrégé iv).

Concernant les OPÉRATIONS, les trois tableaux suivants résument les règles de calcul :

	y est ip	y est app	y est ig
x ip	ip	app	ig
x app	app	app	ig
x ig	ig	ig	?

nature de x + y

	y est ip	y est app	y est ig
x ip	ip	ip	?
x app	ip	app	ig
x ig	?	ig	ig

.nature de xy

	y est ip	y est app	y est ig
x ip	?	ip	ip
x app	ig	app	ip
x ig	ig	ig	?

nature de x/y

Afin de pouvoir en parler commodément, je propose d'appeler l'ensemble de ces propriétés **règles de Leibniz**, en hommage à celui qui inventa la première notation opérationnelle du calcul infinitésimal (et de la même manière qu'il existe des **règles des signes** pour les propriétés liant l'ordre et les résultats d'opérations).

Pour le reste, dans le corps **R**, les ip, ig et autres réels non-standard sont des réels comme vous en avez l'habitude : ainsi, par exemple, si N est un ig, 0N est égal à 0 (un ig est un nombres comme les autres).

Concernant l'ORDRE, la présence des non standard au sein de **R** n'apporte rien de nouveau : **R** est totalement ordonné archimédien. Ainsi, pour a réel limité et ε réel ip, il existe un réel b tel que $b.\varepsilon > a$ (ce b est évidemment ig)
La droite réelle peut alors se décrire ainsi :
- Autour de 0 (standard), les ip (non standard), inférieurs en valeur absolue à tous les standards.
- Autour de chaque standard, son "halo", constitué des sommes de ce standard et d'un ip.
- Plus grands que tous les standards, les ig positifs (et, plus petits que tous les standards, les ig négatifs).

0-2. Mais l'existence effective de nombres ip ou ig semble faire apparaître des contradictions. Ainsi, deux siècles de refoulements et de complexes (voir, par exemple les *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal - 1797 - Lazare Carnot*), débouchèrent vers 1865 sur la présentation des limites en $\forall\varepsilon \;\; \exists\alpha$ ..., par Weierstrass. La cohérence du discours analytique était sauvée et ces nombres par qui le progrès mais aussi le scandale étaient arrivés furent donc évacués du vocabulaire officiel pour n'être plus que tolérés dans les discours parlés ou les applications à des phénomènes physiques.

0-3. Heureusement, **aujourd'hui, on sait parler d'ig et d'ip sans risquer l'enfer de la contradiction logique.** Nous avons choisi ici d'énoncer d'abord trois théorèmes, conséquences immédiates et simples des axiomes de la théorie non-standard des ensembles, dite ZFC-IST, développée par Nelson en 1977. Ensuite, nous montrons comment ils permettent de démontrer les règles de Leibniz et, donc, de travailler dans **R**.

0-4. Evidemment, pour profiter de cette nouvelle aisance et utiliser ces nouveaux outils, il y a **un prix à payer** : un **prix technique** d'abord, qui se traduit par une attention particulière et critique vis-à-vis d'énoncés classiques dont l'universalité doit être éventuellement restreinte aux objets mathématiques classiques (c'est d'ailleurs habituel après toute introduction d'objets nouveaux et féconds).

Mais il faut aussi payer un **prix épistémologique** ; nous sommes en effet obligés d'affiner l'image mentale que nous avions des catégories du "fini" et de "l'infini" ; cependant ceci n'est ennuyeux qu'en première apparence car ce remodelage ouvre de nouveaux horizons.

1 - Le vocabulaire des infiniments grands et des infiniment petits.

1-1. De Leibniz à Cauchy, le vocabulaire des ip et des ig fut universellement adopté. En témoignent les extraits choisis de :

[1] *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* , 1696, Marquis de l'Hospital
[2] *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, édition latine de 1748, traduite en français par Labbey en 1793, L. Euler.
[3] *Le calcul infinitésimal*, 1823, A.L.Cauchy.
(Ces trois ouvrages sont, comme on le sait, heureusement réédités par ACL-Editions - 50 rue des écoles - 75005-Paris).
(*) Voir en fin d'article.

On y verra des "demandes comme *dxdy est une quantité infiniment petite par rapport à ydx et xdy* [1], des égalités (osons le dire carrément fausses) comme $\frac{i-1}{i} = 1$ *pour i infiniment grand* [2], ou la définition de la continuité d'une fonction par *f(x + i) - f(x) est une quantité infiniment petite lorsque i est infiniment petit* [3].

1-2. Exemple : la continuité

En A.N.S., on peut choisir la définition de la continuité donnée par Cauchy (pour une fonction standard en un point standard). Voici alors ce qu'on peut écrire :

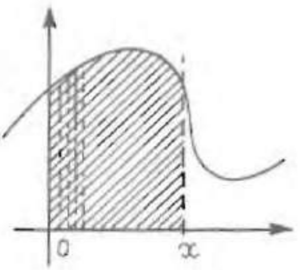
Propriété : $x \to \sqrt{x}$ est continue en 2
Démonstration : Soit h ip

$$\left|\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{h}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}\right| < \left|\frac{h}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right| < |h|$$

$\sqrt{2+h} - \sqrt{2}$ est donc bien un ip quand h est un ip. c q f d

1-3. Exemple : Une somme

Lorsque f est une fonction continue sur l'intervalle standard $[0, x]$, un exposé (non standard et absolument élémentaire) montre comment calculer l'aire de la surface située entre le graphe de f et l'axe des abscisses : on découpe l'intervalle [0,x] en un nombre n infiniment grand de segments de longueur $\frac{x}{n}$ infiniment petite, de sorte que cette aire est égale au nombre standard infiniment voisin de la somme finie : $S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n} f\left(k\frac{x}{n}\right)$



Propriété : l'aire de la surface située entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction $x \to x^2$ sur l'intervalle $[0,x]$ est égale à $\frac{x^3}{3}$.

Démonstration : Ici $S = \frac{x}{n}\left[0 + \left(1\frac{x}{n}\right)^2 + \left(2\frac{x}{n}\right)^2 + \left(3\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + \left((n-1)\frac{x}{n}\right)^2\right]$.

$S = \frac{x^3}{n^3}\left[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n-1)^2\right] = \frac{x^3}{n^3}\left(\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}\right) \simeq \frac{x^3}{3}$.

En effet, pour n infiniment grand, $\frac{n(n-1)(2n+1)}{n^3} \simeq 2\frac{n^3}{n^3} = 2$ cqfd.

1-4. Exemple : les limites

En mathématiques classiques, la phrase *"f(x) tend vers 3 quand x tend vers* $+\infty$*"* est de type "xylolinguistique" ; c'est à dire qu'il n'est pas possible de la casser en deux morceaux ayant chacun leur sens : ainsi *"f(x) tend vers 3"* ne signifie rien et *"x tend vers l'infini"* encore moins.

En A.N.S., *"f(x) tend vers 3"* peut prendre le sens de *"f(x) est infiniment voisin de 3"*, équivalent à *"f(x) - 3 est infiniment petit"*. De même *"x tend vers +∞"* peut prendre le sens de *"x est infiniment grand"*. La phrase *"f(x) est infiniment voisin de 3 quand x est infiniment grand"* a alors le sens que lui donne tout simplement l'assemblage syntaxiquement correct de ces deux morceaux.

L'avantage didactique est ici indéniable : un élève comprend mieux une phrase dont il peut analyser séparément chaque composant, qu'une phrase (longue) qu'il n'a pas le droit de couper pour la comprendre ou la traduire. Mais l'avantage est aussi technique comme on peut le constater dès la mise en œuvre de démonstrations élémentaires utilisant les règles de Leibniz. Ainsi, par exemple :

Propriété : $1/x$ tend vers 1/2 quand x tend vers 2

Démonstration : soit h un ip. Si $x = 2 + h$,
alors $1/x = 1/(2 + h) = 1/2$ cqfd

Propriété : $\dfrac{3x - 1}{x + 7}$ tend vers 3 quand x tend vers $+\infty$.

Démonstration : $\dfrac{3x - 1}{x + 7} = \dfrac{3 - 1/x}{1 + 7/x}$. Si x est ig, $1/x$ et $7/x$ sont ip et donc $\dfrac{3x - 1}{x + 7} = 3$ cqfd

Propriété : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \to 2$ quand $n \to +\infty$

Démonstration :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} = 2\left[1 - (1/2)^{n+1}\right]$$

Or, $(1/2)^n$ est un ip pour n ig (démonstration classique fondée sur le fait que, si a est supérieur à 1, alors $a^n > n\,a$ pour n assez grand, et donc pour n ig ; à l'inverse, $(1/a)^n$ est ip pour n ig).

Finalement, pour n ig, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2$

cqfd

Le professeur de Lycée remarquera que ces démonstrations ne sont qu'une simple paraphrase de celles en usage dans les Lycées depuis la dernière réforme qui a remplacé la manipulation d' α et d'ε par des majorations et des minorations bien choisies.

Un premier pas naturel vers l'A.N.S. avait déjà été suggérée par le bon sens pédagogique ; le deuxième pas ne serait pas bien révolutionnaire : au lieu d'accepter quelques résultats fondamentaux sur des fonctions de référence tels "$1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ", il suffirait d'énoncer les règles de Leibniz.

De plus, elle permettrait de replacer le "langage des limites" dans un véritable discours mathématique, évitant l'introduction de notion "à définition flottante" du genre *"Je ne dis pas ce qu'est une limite, mais vous voyez à peu près ce dont il s'agit ; maintenant, je vous dis que la limite en 0 de la fonction sinus est 0!"*.

2 - Cependant ...(1)

...il y a un gros ennui très classique : les règles de Leibniz énoncées en tête de cet article risquent de n'avoir aucun sens dans la mesure où, ni les nombres infiniment petits, ni les nombres infiniment grands ne semblent pouvoir exister!

Ainsi, le principe de récurrence semble interdire la considération d'entiers infiniment grands dans **N** :

> Si n n'est pas ig, alors $n + 1$ ne l'est pas non plus (on voudra évidemment que les règles naturelles de Leibniz soient respectées). Par récurrence, donc, aucun entier n'est ig. Il n'existe finalement pas d'ig et, donc, pas plus d'ip (qui seraient des inverses d'ig).

Un autre argument semble confirmer la non-existence des ip, à partir du "théorème de la borne supérieure".

> Si, en effet, l'ensemble des ip était non vide, il serait majoré (par un appréciable quelconque) et, donc, aurait une borne supérieure ; notons la b. Alors, ε étant ip, $b - \varepsilon$ serait ip et $b + \varepsilon$ ne le serait pas. Mais cela contredirait la règle que la somme de deux ip ($b - \varepsilon$ et 2ε) est ip.

Ces arguments, très forts, ne purent être contournés que dans notre deuxième moitié du vingtième siècle, après la naissance et la consolidation logique de la théorie des ensembles.

3 - Comment s'en sortir ?

La solution d'Abraham Robinson (1961) est assez compliquée à suivre, mais a l'avantage d'être "constructive" : elle consiste à bâtir une "ultrapuissance" de **R** dont certains éléments peuvent être identifiés aux réels "standards" (connus jusqu'alors) et dont les autres, dits "non-standard" peuvent s'interpréter comme des infiniment grands, des infiniment petits ou des infiniment voisins de réels standard. Comme on le comprendra aisément, il n'est ni possible ni utile d'en dire plus ici.

---

(1) Pour des raisons difficiles à déterminer, il s'est écoulé près d'un an entre l'écriture de cet article et sa parution dans le *Bulletin*. De sorte qu'un certain nombre de progrès ont pu être faits dans l'exposition élémentaire de l'A.N.S. Le lecteur pourra consulter les deux petites brochures de l'IREM de Paris VII intitulées *"La nouvelle et Simple Analyse"* (petit livre bleu) et *"Les débuts en Analyse"* (Petit livre orange).

Heureusement pour nous, Edward Nelson introduisit en 1977 une théorie dite "théorie des ensembles internes", consistant en un raffinement de la théorie des ensembles dite ZFC (pour Zermelo, Fraenkel et l'axiome du Choix), auquel il adjoint trois axiomes contenant un nouveau symbole de prédicat primitif (c'est-à-dire non défini, comme le symbole $\in$) se traduisant par l'adjectif "standard".

Autrement dit : il y a des objets mathématiques qui sont standard et d'autres qui ne le sont pas, l'emploi de ce nouvel adjectif étant régi par trois axiomes dont nous ne donnerons ici que quelques "bonnes" conséquences.

Evidemment un objet sera "standard" dès qu'il peut se définir par des formules standard à partir d'autres objets standard ; ainsi les objets désignés par les symboles 0, 1, π, sin, +, /, e^{i} , $\mathbf{R}^*$, ... sont standard.

3-1. I et S

Le premier axiome, appelé **axiome d'Idéalisation**, affirme ce que tout le monde attendait : l'existence d'éléments "idéaux", dits plus précisément "non-standard", au sein même des ensembles classiques.

Le deuxième, appelé **axiome de Standardisation**, joue sur l'idée (nouvelle) qu'il y a des ensembles standard et d'autres qui ne le sont pas ; de la même manière il y a des propriétés qui sont standard (classiques pourrait-on dire) et d'autres qui ne le sont pas. L'axiome de standardisation affirme alors que toute propriété, même non-standard, définit un ensemble standard.

Le troisième, appelé **Axiome de Transfert**, assure la perrennité des propriétés classiques et sera discuté dans le paragraphe suivant.

Intéressons-nous d'abord aux conséquences des deux premiers axiomes ; au niveau quasiment lycéen de cet article, on se contentera d'en énoncer deux qui constitueront des théorèmes fondamentaux pour la manipulation des nombres non-standard dans **R**.

Théorème I - Caractérisation des ensembles finis et infinis.

Soit E un ensemble standard :
Tous les éléments de E sont standard *ssi* E est fini

Contraposément : **E est infini *ssi* E contient des éléments non-standard**

Dans cet énoncé, un ensemble *fini* est, classiquement, un ensemble où toute injection est une surjection ; et un ensemble *infini* est un ensemble non fini. Cette définition classique de la "finitude" d'un ensemble coïncidait, il y a trente ans avec l'idée que l'on pouvait se faire du fini et de l'infini aussi bien en algèbre qu'en analyse. Il apparaît aujourd'hui, comme on le verra plus loin, que d'autres images mentales concernant l'infini peuvent être invoquées. Ceci étant, on déduit immédiatement de ce théorème que N contient des éléments non-standard et que ces éléments viennent se ranger après les standard ; en effet : pour tout n standard positif, l'ensemble (classique (2) et même standard) des éléments inférieurs à n est fini ; tous les éléments de cet ensemble sont donc standard et, donc, les entiers non-standard sont supérieurs à tout n standard ; c'est pourquoi ils "méritent" de s'appeler "infiniment grands positifs".

(2) On appelle "classique" tout ensemble (ou toute propriété) pouvant se définir (ou s'énoncer) sans usage de l'adjectif "standard", ni des mots qui pourraient en être dérivés.

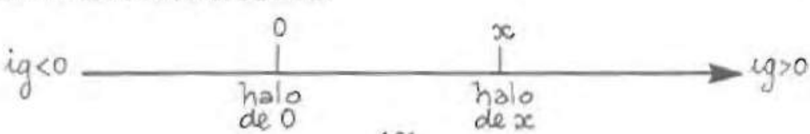
Puisqu'il existe des entiers infiniment grands positifs, alors, par le jeu des opérations (soustraction, quotient, addition, ...), il existe des entiers infiniment grands négatifs, des réels infiniment petits et des réels infiniment grands ; par exemple, entre les entiers infiniment grands positifs n et $n + 1$, il existe un paquet de réels infiniment grands, d'ailleurs en bijection avec $]0,1[$.

Pour parler plus commodément, on pose par définition :
Un réel ig est un réel dont la partie entière est non-standard.
Un réel ip est un réel dont l'inverse est ig.
Deux réels infiniment voisins sont deux réels dont la différence est ip.
Un réel limité est un réel non ig.
Un réel appréciable est un réel ni ig, ni ip.
Munis de ce vocabulaire, nous pouvons alors énoncer notre deuxième théorème fondamental.

Théorème S - Partie standard d'un réel.

Pour tout réel x limité, il existe un unique réel standard, noté $^\circ x$, infiniment voisin de x . Ce réel s'appelle la partie standard de x .

A partir de maintenant, la **droite réelle** se présente bien comme décrite dans l'encadré en début d'article :



3-2. T ...

Le troisième axiome de la théorie ZFC-IST est **l'axiome de transfert**, dont l'énoncé ressemble au suivant.

Théorème T - Transfert. **Soit une propriété classique portant sur les éléments d'un ensemble standard E.** **Si cette propriété est vraie pour tous les éléments standard de E, alors elle est vraie pour tous les éléments de E.**

Cet axiome assure à la fois deux importantes nécessités :
- La constance des propriétés classiques et, en particulier, le fait que tout objet bien défini sans l'usage de l'adjectif standard à partir d'objets standard est standard (les "choses" classiques sont incontestablement standard).
- L'asservissement irréductible des nombres non-standard (inaccessible pour nous)(3) aux standard que nous connaissons. Ainsi est-il simple de déduire, du théorème T, l'utile résultat suivant :

Théorème dit de l'unicité de l'ombre. **Deux ensembles standard sont égaux *ssi* ils ont les mêmes éléments standard.**

Ainsi, il n'existe pas d'ensemble standard qui contiennent les entiers standard sans contenir N tout entier, c'est-à-dire aussi les infiniment grands. En fait, ces entiers standard ne constituent donc pas un "ensemble" au sens de

---

(3) Il est peut-être opportun de dire ici comment il est commode de penser aux objets non-standard : ce sont des objets que nous ne pouvons pas connaître, c'est-à-dire dont nous ne pouvons pas rencontrer une réalisation immédiate, ils restent inaccessibles à toute observation ou expérimentation directes. Ce sont des objets trop lointains, ou trop petits, ou encore imperceptiblement proches d'un objet standard qui en est, c'est le mot juste, "l'ombre".
Supposer l'existence de tels objets dans toute situation faisant intervenir une infinité d'objets n'est que la sagesse même! Et l'axiome d'idéalisation ne fait pas autre chose.
Cependant la reconnaissance de notre ignorance s'accompagne d'un garde-fou logique exprimé par l'axiome du transfert, qui postule que notre manque d'information sur l'inconnu est minimale : ce que nous ne connaissons pas est ainsi entièrement déterminé par ce que nous connaissons! Autrement dit, deux objets standard différents ne peuvent pas se représenter à nous comme identiques!

ZFC ; en particulier cela n'a pas de sens de s'interroger sur ce que serait "leur" cardinal!

De même, il n'existe pas d'ensemble standard qui ne contienne que des infiniment petits ; et un ensemble standard qui contient des ip contient aussi des réels standard autres que 0. Le fait que les non-standard soient ainsi tellement "collés" aux standard qu'il soit impossible de parler d'un ensemble (standard) qui contienne les uns sans contenir les autres a, au moins, deux conséquences importantes :
- C'est cette impossibilité qui permet de réduire les paradoxes signalés dans les paragraphes 2 et 3.1.
- Il n'y a aucune difficulté à étendre la plupart des propriétés classiques aux nombres non-standard ; c'est ainsi que l'on parle sans problèmes de développements décimaux ou de puissances ou de logarithme de nombres non-standard,...

3-3. Les règles de Leibniz

Il nous reste à montrer comment les théorèmes choisis pour fondamentaux nous permettent de démontrer les règles de Leibniz (dans la mesure où on ne voudrait pas tout simplement les parachuter).

Montrons par exemple que, lorsque a et b sont ig positifs, leur produit $a\,b$ est ig.

> Soit n un standard quelconque supérieur à 1 ; nous devons montrer que $a\,b > n$. Or, a et b étant ig, sont supérieurs à n , et donc $a\,b$ est supérieur à n^2, donc à n . cqfd

Montrons aussi que, lorsque ε est ip et x appréciable, le quotient ε/x est ip.

> Soit n un standard quelconque non nul ; nous devons montrer que $|\varepsilon/x| < |1/n|$. Si nous savions que $|x/n|$ est appréciable, la démonstration serait terminée puisque ε est bien inférieur à tout nombre appréciable.
> Pour le montrer, n étant standard donc appréciable, il faut savoir que le quotient de deux nombres appréciables est appréciable. C'est une des autres règles de Leibniz que l'on doit donc avoir démontrée au préalable.

On voit comment les différentes règles pourraient ainsi se démontrer les unes après les autres, à partir de lemmes analogues à :
Un réel positif est ip ssi il est inférieur à tout réel standard positif.
Un réel est appréciable ssi il est encadré par deux réels standard de même signe

Terminons sur une petite remarque concernant les malheureusement nommées **formes indéterminées :**

En A.N.S., pas plus qu'en analyse classique, on n'a le droit d'écrire des expressions telles que $\frac{0}{0}$ ou des épouvantables égalités telles que "pisurzéroégalelinfini".

Par contre le quotient de π par un ip est un ig, et on ne sait rien, *a priori*, sur le quotient de deux infiniment petits. Mais cette ignorance n'est pas plus tracassante que le fait de ne rien savoir , *a priori*, sur le signe de la différence de deux réels (on retrouve ici le rapprochement signalé en 0.1. entre les règles de Leibniz et les règles des signes d'une somme ou d'un produit).

4 - Le prix à payer

A ce stade de la lecture, on a peut-être entrevu que l'introduction d'objets non-standard ne manquait pas d'avantages aussi bien techniques ou didactiques que conceptuels. Et on sent bien qu'il doit y avoir quelque part un "prix à payer" dont l'auteur ne nous a pas encore vraiment parlé.

4 .1. . Le prix technique

Dès que l'on introduit de nouveaux nombres dans les mathématiques, il faut bien accepter de payer un prix technique. Evidemment, sur le strict plan mathématique, rien de ce qui était vrai ne devient faux ; cela voudrait dire qu'on se permettrait de dire des choses fausses !

Mais il faut faire attention à la manière dont on se le disait ; les sous-entendus n'étant plus les mêmes, il se peut que l'on doive sérieusement revoir sa façon de s'exprimer, sinon sa façon de penser.

> Par exemple, dans **N**, on prend l'habitude de dire et de penser que "la somme de deux nombres est supérieure à chacun des termes". Après l'introduction des nombres négatifs, cet énoncé n'est plus vrai et il faut s'habituer à dire, plus correctement "la somme de deux nombre naturels est supérieure à chacun des termes". La difficulté essentielle vient du *fait suivant :* avant d'introduire les nombres négatifs, on ne sait pas

qu'il y a d'autres nombres que ceux qu'on ne peut pas appeler "naturels" avant d'en avoir rencontré d'autres.

On voit là se profiler un obstacle majeur, que l'on rencontre fréquemment, aussi bien dans l'histoire que dans l'éducation, celui de **l'extension du contexte :**
L'énoncé d'une propriété classique, vrai pour les objets classiques, peut devenir faux lorsque certains objets non-classiques y interviennent.

C'est le cas du théorème de la borme supérieure, qui devient faux pour certaines "parties" non-classiques de **R**, comme, par exemple, la "partie" constituée des infiniment petits (dont on a vu qu'il ne s'agissait pas d'un ensemble).

C'est aussi le cas de la soit-disant démonstration de l'inexistence des entiers infiniment grands dans laquelle on applique le principe de récurrence à une propriété non-standard, ce que l'on a évidemment pas le droit de faire sans précaution ; en effet le principe de récurrence, la notion de finitude et l'existence d'entiers infiniment grands ont des "liaisons dangereuses" qu'il faut examiner avec soin.

Chaque fois donc, que l'on voudra appliquer un énoncé connu dans une situation pouvant faire intervenir des objets ou des propriétés non-standard, on prendra garde que la nouvelle nature des intervenants n'oblige pas une modification de ces termes.

4 .2. Le prix épistémologique

Mais il y a un prix plus dur à payer, parce qu'il oblige à une remise en cause d'idées pourtant déjà difficiles. Il s'agit, comme nous l'avions laissé entendre, de la notion de "fini".

Mais ce n'est pas si grave que cela ; car, pour franchir cet obstacle, il suffit de comprendre qu'il est sémantique et, donc, de se persuader qu'il est dû à une maladresse de vocabulaire : le mot "fini" pour caractériser un ensemble où toute surjection est une bijection a été mal choisi ; on aurait été mieux inspiré en parlant d'ensemble "comptable" ou "discret borné" ou "énumérable", "numérotable",...

En effet, aujourd'hui, on se trouve un peu embarassé de devoir énoncer:
Pour tout n de N, l'ensemble {1, 2, ..., n } est fini.

Si vous n'êtes pas encore embarassé, c'est que vous n'avez pas saisi que ce théorème, classique, est vrai **même lorsque** n **est un entier infiniment grand** (vous pouvez facilement contrôler que la démonstration ne prend aucunement en compte la nature de n). Mais si vous avez bien lu les lignes précédentes, votre embarras sera de courte durée. Comme il n'est pas question de changer aujourd'hui le vocabulaire "fini/infini", il paraît sage de proposer plutôt la solution lexicologique suivante : Evitons d'employer les expressions comme **"infiniment petit"** et **"infiniment grand"**(4) et remplaçons-les par des termes faisant moins référence à l'infini. On trouve par exemple, dans quelques publications, **"infinitésimal"** et **"illimité"**. Je suis bien près de préférer quant à moi, **"petissime"** et **"grandissime"**, mais l'Académie m'accordera-t-elle ce néologisme ? J'ai aujourd'hui un faible pour "idéalement grand", "idéalement petit" et "idéalement voisin" dont les abréviations ig, ip et iv restent bien commodes.

Mais il ne faudrait pas croire que cette histoire de "fini/infini" ne nous amène que des déboires. En effet, la finitude de l'ensemble $\{1, 2,...,n\}$ pour n grandissime nous permet d'appliquer les nombres théorèmes sur les puissances, produits ou sommes finis, qui ne se généraliseraient pas pour des ensembles infinis d'indices. On peut ainsi, par exemple, découper l'intervalle [0,1] en un nombre ifini d'intervalles petissimes, de sorte que la théorie élémentaire de l'intégration devienne carrément triviale...

CONCLUSION

L'analyse non-standard rencontre aujourd'hui un accueil "partagé" : certains, regrettant peut-être d'en avoir sous-évalué l'importance, ne veulent pas en entendre parler, d'autres, refusant d'en voir les applications pourtant fécondes, lui dénient tout intérêt. A l'opposé, il en est qui la défendent avec invective, passion ou simple enthousiasme.

On aura certainement compris, en lisant cet article, que l'auteur, fidèle à son habitude, a préféré rester à l'extérieur des polémiques pour privilégier l'exposé d'un contenu. J'espère cependant que la volonté de m'exprimer ne m'aura pas trop amené à caricaturer certaines notions et que les prêtres ou les virtuoses de l'A.N.S. ne m'en voudront pas outre mesure.

(4) *Oui, je sais bien que j'ai utilisé ces expressions* tout au long de cet article, mais on m'accordera qu'elles étaient utiles à la clarté d'un premier exposé. Voir aussi la note du paragraphe 2.

Extrait de *"L'analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes"* du Marquis de L'Hospital.

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque* x = a, *c'est-à-dire lorsque le point* P *tombe sur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entenduës deux lignes courbes *ANB*, *COB*, qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui soient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les *PM* : de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point *B* ; puisque par la supposition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorsque le point *P* tombe en *B*. Cela posé, si l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB*, *COB* aux points *f*, *g* ; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle ne diffère pas de *BD*. Il n'est donc question que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il est visible que la coupée *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN*, *PO* deviennent nulles ; & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il suit que ces appliquées, elles-mêmes *bf*, *bg*, sont la différence des appliquées en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB*, *COB* ; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, aprés avoir fait $x = a = Ab$ ou *AB*, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée *bd* ou *BD*. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

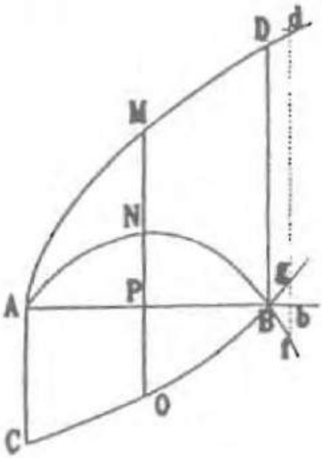
164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, aprés avoir fait $x = a$, c'eſt-à-dire qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorſque $x = a$.

On pourroit réſoudre cet éxemple ſans avoir beſoin du calcul des différences, en cette ſorte.

Ayant ôté les incommenſurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant diviſé par $x - a$, ſe réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & ſubſtituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.



Extrait de *"L'introduction à l'analyse infinitésimale"* de L.Euler

CHAPITRE VII.

Du Développement des Quantités exponentielles & logarithmiques en Séries.

114. Puiſqu'on a $a^0 = 1$, & qu'à meſure que l'expoſant de a augmente, la valeur de la puiſſance augmente auſſi, pourvu que a ſoit un nombre plus grand que l'unité; il s'enſuit que ſi l'expoſant ſurpaſſe infiniment peu zéro, la puiſſance ſurpaſſera l'unité auſſi infiniment peu. Soit ω un nombre infiniment petit, ou une fraction ſi petite, qu'elle differe infiniment peu de zéro, on aura $a^\omega = 1 + \psi$, ψ étant un nombre infiniment petit; car il eſt conſtant par le Chapitre précédent, que ſi ψ n'étoit pas infiniment petit, ω ne pourroit pas l'être non plus. ψ ſera donc ou $= \omega$, ou $> \omega$, ou $< \omega$, rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre a. Comme ce rapport eſt encore inconnu, faiſons $\psi = k\omega$, de maniere que $a^\omega = 1 + k\omega$; ſi nous prenons a pour la baſe logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$.

EXEMPLE.

Pour faire voir plus clairement comment le nombre k dépend de la baſe a; ſuppoſons $a = 10$, & cherchons au moyen des tables ordinaires, le logarithme d'un nombre qui excede de très-peu l'unité, par exemple, celui de $1 + \frac{1}{1000000}$, de maniere que $k\omega = \frac{1}{1000000}$; nous trouverons $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)$ $= l\,\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega$. Donc à cauſe de $k\omega$ $= 0{,}00000100000$, $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ & $k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258$. On voit par-là que k eſt un nombre fini dépendant de la valeur de la baſe a; car ſi nous euſſions pris un autre nombre pour la baſe a, le logarithme du même nombre $1 + k\omega$, auroit eu un rapport donné avec le premier, & il en ſeroit réſulté une autre valeur pour k.

115. Puifque $a^{\omega} = 1 + k\omega$, on aura $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, quelque nombre qu'on prenne pour i. Donc $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1.\,2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3}k^3\omega^3 +$ &c. Si l'on fait $i = \frac{z}{\omega}$, & que z repréfente un nombre quelconque fini, à caufe de ω infiniment petit, i deviendra un nombre infiniment grand, & par conféquent $\omega = \frac{z}{i}$, étant une fraction dont le dénominateur eft infini, fera une quantité infiniment petite, telle qu'elle a été fuppofée. Écrivons donc $\frac{z}{i}$ à la place de ω, & nous aurons $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1.\,2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.\,2i.\,3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1.\,2i.\,3i.\,4i}k^4z^4 +$ &c; équation, qui fera vraie, fi l'on prend pour i un nombre infiniment grand, & alors k fera un nombre déterminé dépendant de la valeur de a, comme nous venons de le voir.

116. Comme i eft un nombre infiniment grand; il s'enfuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il eft évident que plus le nombre qu'on fubftituera à i fera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité; donc fi i eft un nombre plus grand qu'aucune quantité affignable, la fraction $\frac{i-1}{i}$ égalera l'unité. Par une raifon femblable; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ &c. Concluons de-là que $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; ainfi des autres. Ces valeurs étant donc fubftituées, il en réfultera $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.\,2} + \frac{k^3z^3}{1.\,2.\,3} + \frac{k^4z^4}{1.\,2.\,3.\,4} +$ &c. à l'infini. Cette équation exprime en même temps la relation entre les nombres a & k; car, en fuppofant $z = 1$, on aura $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.\,2} + \frac{k^3}{1.\,2.\,3} + \frac{k^4}{1.\,2.\,3.\,4} +$ &c, & pour que $a = 10$, il faut que k foit environ $= 2{,}30258$; comme nous l'avons trouvé ci-deffus.

Extrait des *"Résumés des leçons d'analyse de l'Ecole Polytechnique"* de A.L.Cauchy.

Souvent, dans le calcul, on se sert de la caractéristique Δ pour indiquer les accroissemens simultanés de deux variables qui dépendent l'une de l'autre. Cela posé, si la variable y est exprimée en fonction de la variable x par l'équation

(1) $$y = f(x),$$

Δy, ou l'accroissement de y correspondant à l'accroissement Δx de la variable x, sera déterminé par la formule

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Il est bon d'observer que des équations (1) et (2) réunies on conclut

(3) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Soient maintenant h et i deux quantités distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite, et $\alpha = \frac{i}{h}$ le rapport infiniment petit de ces deux quantités. Si l'on attribue à Δx la valeur finie h, la valeur de Δy, donnée par l'équation (3), deviendra ce qu'on appelle la *différence finie* de la fonction $f(x)$, et sera ordinairement une quantité finie. Si au contraire l'on attribue à Δx une valeur infiniment petite, si l'on fait par exemple

$$\Delta x = i = \alpha h,$$

la valeur de Δy, savoir,

$$f(x+i) - f(x) \quad \text{ou} \quad f(x + \alpha h) - f(x),$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite. C'est ce que l'on vérifiera aisément à l'égard des fonctions

$$A^x, \ \sin x, \ \cos x,$$

auxquelles correspondent les différences

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1) A^x,$$

$$\sin(x+i) - \sin x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x+i) - \cos x = -2 \sin \frac{i}{2} \sin\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

dont chacune renferme un facteur $A^i - 1$, ou $\sin \frac{i}{2}$, qui converge indéfiniment avec i vers la limite zéro.

Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence

$$f(x+i) - f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit.