Dans nos classes

D'une pierre deux coups

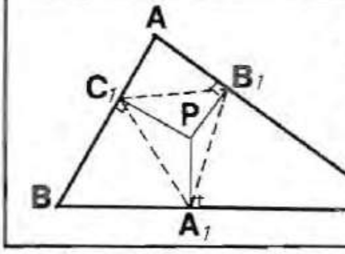
Jacques Lubczanski

Le but de ce problème est de donner une résolution simultanée de deux problèmes célèbres :

Le problème de FERMAT : Tois points A, B et C étant donnés, trouver un point M tel que MA+MB+MC soit minimum.

Le problème de FASHBENDER : Trois points A, B et C étant donnés, trouver le plus grand triangle équilatéral dont les côtés passent par A, B et C.

Tout au long de ce problème, on va utiliser une notion simple mais commode, celle de "*triangle podaire*" :



ABC est le triangle podaire de P relatif à ABC.

Etant donné un triangle ABC et un point P, intérieur au triangle, on appelle *triangle podaire de P relatif à ABC*, le triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont les projections orthogonales de P sur chacun des côtés du triangle initial.

I - Le point de Toricelli

ABC est un triangle quelconque.

a) Démontrer qu'il existe un point T (appelé point de Toricelli du triangle ABC) tel que les trois angles (TA,TB), (TB,TC) et (TC,TA) aient même mesure.

b) On note P, Q et R les points tels que ABC soit le triangle podaire de T relatif à PQR. Démontrer que PQR est équilatéral.

II - Quand un problème rencontre un autre problème.

PQR est un triangle équilatéral ; M un point intérieur à PQR.

a) Soit IJK le triangle podaire de M relatif à PQR et h la longueur des hauteurs de PQR. En écrivant que:

aire(PQR) = aire (PQM) + aire(QRM) + aire(PRM)

montrer que MI + MJ + MK = h .

b) Montrer que

$\forall$ A $\in$ [QR] ,$\forall$ B $\in$ [PR] , $\forall$ C $\in$ [PR]

(M intérieur à ABC) $\Rightarrow$ MA + MB + MC $\geq k$

c) En déduire que si A, B, C et M sont donnés,

$\forall$ P, Q, et R tels que [QR] contienne A,

[PR] contienne B

[PQ] contienne C

(PQR équilatéral) $\Rightarrow$ aire(PQR) $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC})^2$

III - La résolution "simultanée" :

ABC est un triangle quelconque, T son point de Toricelli.
P,Q,R sont les points tels que ABC soit le triangle podaire de T relatif à PQR (Cf I - b).
h est la longueur des heuteurs de PQR.

a) Démontrer que TA + TB + TC = h .
b) En déduire les solutions des problèmes de Fermat et Fashbender.

Source : A.DELEDICQ, *"Mathématiques buissonnières"* Ed.Cédic, 1975