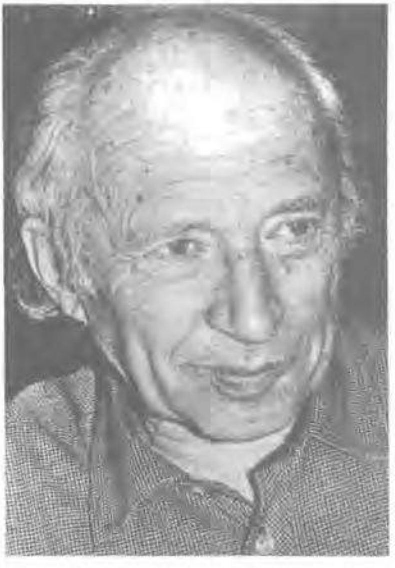
Comment je suis devenu mathématicien

Un entretien avec I.M. GELFAND



Israël Moïssevitch GELFAND est l'un des plus grand mathématiciens contemporains. Auteur de plus de 500 publications parmi lesquelles des articles et des livres de mathématiques mais aussi de physique, de biologie, de médecine et d'applications des mathématiques à la sismologie. Il est membre de nombreuses sociétés savantes dont les Académies des Sciences de France et d'URSS. Il a été fait docteur *Honoris Causa* des Universités de Paris, Harvard, Oxford (entre autres). Le séminaire de mathématiques de I.M.GELFAND à l'Université de Moscou est célèbre dans le monde entier. Il se réunit depuis déjà plus de quarante ans tous les lundis soirs sur les Monts Lénine. Y participent des étudiants débutants comme des savants connus. De nombreux mathématiciens célèbres ont été formés par ce séminaire.

L'entretien de GELFAND avec les mathéma-ticiens V.RETAH et A.SOSSINSKI a été publié dans le mensuel *QUANT* qui publie des articles amusants et passionnants sur les mathématiques, l'informatique et la physique. Il est lu par plus de deux cent mille abonnés, élèves, professeurs du secondaire et du supérieur.

Nous avions prévu une liste de questions. GELFAND les a trouvées très intéressantes ... mais il a ajouté qu'il ne se sentait pas compétent pour y répondre:

"Vous comprenez, je ne me sens pas le droit d'imposer mon point de vue à vos lecteurs, en particulier aux jeunes. J'ai plutôt envie de leur raconter comment je me suis mis à m'intéresser aux mathématiques, les premiers problèmes que j'ai abordés...

Qui perd gagne !

L'un des romans de Graham Greene s'appelle *"The loser takes all"* (qui perd gagne). Ma biographie mathématique illustre cette sentence, elle a été marquée par des tas de chances inespérées. D'abord, je n'ai pas suivi de cours à l'Université, ensuite à cause des difficultés de la vie de ma famille, je me suis retrouvé à Moscou, sans parents, sans travail à l'âge de seize ans. "Qui perd gagne !" ? Je m'explique.

Dans une nouvelle d'un autre écrivain anglais, Somerset Maugham, le héros, employé dans une église, a des ennuis : on découvre, contrairement à ses déclarations, qu'il ne sait pas lire et il est renvoyé. Il commence à vendre des cigarettes dans la rue, puis il achète une boutique, puis d'autres ... et il fait une brillante carrière dans le commerce, il devient l'homme le plus riche de la ville, on l'élit maire. Et voila qu'il donne un interview, comme celui-ci, et il raconte au journaliste qu'il ne sait pas lire.

Epoustouflé, celui-ci s'exclame : "Quels sommets auriez-vous atteint si vous aviez su !". Réponse immédiate : *"Je serais resté employé d'église !"*.

Ainsi, en février 1930, j'avais seize ans et demi, en arrivant à Moscou chez des parents éloignés, je n'ai pas trouvé de travail, je faisais de petits boulots et la plupart du temps j'allais à la Bibliothèque Lénine "récupérer" des connaissances que je n'avais pas fini d'acquérir à l'école ou dans l'institut technique (que je n'avais pas terminé). A la Bibliothèque, je fis la connaissance d'étudiants de l'Université, et je commençai à assister à des séminaires. A 18 ans, je préparai l' "*aspiranture*" que j'ai passé à 19 ans et ensuite ma biographie mathématique a suivi des chemins classiques. Mais ce n'est pas de cela que je veux parler aux lecteurs de *Quant*, mais de ce qui a précédé, comment je me suis intéressé aux mathématiques entre 13 et 17 ans. Je veux leur en parler pour deux raisons. D'abord, à ma grande surprise, pour la plupart des futurs mathématiciens professionnels, le don se révèle à cette période-là, avec des variantes (jusqu'à 20, 30 ou même 40 ans chez des mathématiciens tardifs mais très féconds ensuite). Et surtout, c'est à cette époque que s'est formée ma capacité de compréhension des mathématiques. Mes sujets d'étude ont bien sûr changé par la suite, mais l'image esthétique des mathématiques qui s'est alors formée en moi est à l'origine de mes goûts dans les sujets qui m'ont attiré jusqu'à ce jour. Sans la compréhension de cette motivation, on se perd dans l'absence apparente de logique dans mes directions de travail, alors que, guidés par mes première motivations, mes travaux s'enchaînent logiquement les uns à la suite des autres.

D'abord, je me rappelle de la 5$^{\text{ème}}$ et de la 6$^{\text{ème}}$ classe. J'ai compris alors qu'il y a des problèmes de géométrie que l'on ne peut pas résoudre algébriquement. J'ai fabriqué une table des rapports entre la longueur d'une corde et de l'arc qu'elle sous-tend, de cinq en cinq degrés. Ce n'est que beaucoup plus tard que j'ai appris qu'il y avait des fonctions

trigonométriques (non algébriques !) et qu'en fait, j'avais fabriqué une table trigonométrique.
A peu près à cette époque, j'ai fait les exercices d'un livre d'algèbre élémentaire. Je n'avais pas suivi de cours d'algèbre, mais il m'est arrivé de résoudre des exercices assez compliqués, en utilisant des formules algébriques que je ne connaissais pas ! Si je ne pouvais pas trouver la solution, je regardais la réponse et je devinais d'après l'énoncé et la solution une méthode de résolution. En particulier j'ai compris alors et je m'en suis souvenu toute ma vie, qu'on peut acquérir la maîtrise d'un nouveau domaine en résolvant des problèmes, et que parfois, il n'est pas honteux de regarder la réponse ; d'ailleurs quand nous cherchons un problème, nous avons toujours une petite idée, une hypothèse, pour la réponse. En tout cas, la recherche en mathématique est très voisine de cette situation, et par contre très différente de l'entraînement nécessaire pour des examens d'entrée dans une école supérieure.

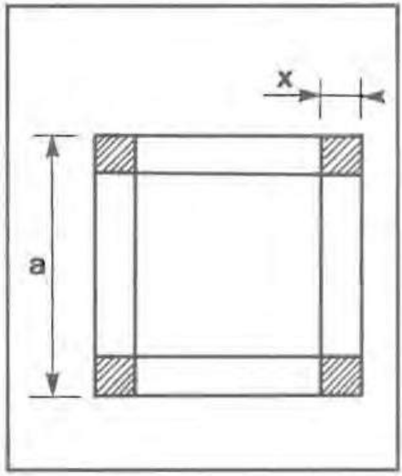
On peut acquérir la maîtrise d'un nouveau domaine en résolvant des problèmes ...

Au début de la 6$^{\text{ème}}$ classe, je me suis intéressé aux problèmes de géométrie dans lesquels on rencontrait des triangles rectangles de côtés 3, 4, 5 ou encore 5, 12, 13. Je me suis mis à chercher tous les triangles rectangles de côtés entiers, et j'ai trouvé une formule générale (pour les triangles pythagoriciens, mais je ne connaissais pas cette expression à l'époque). Malheureusement, je ne me rappelle pas comment j'ai fait. Et vous, comment feriez-vous ?

Je m'occupais de mathématiques même quand j'étais malade ou en vacances. Encore maintenant, je remarque tout le travail que peuvent faire des élèves intéressés quand ils sont malades et qu'ils doivent rester à la maison. Quand mes enfants étaient malades, je prolongeais un peu leur période de convalescence !

Pour la géométrie, nous suivions un ancien manuel, excellent, qui n'était pas influencé par toutes les réformes ultérieures ! Certains théorèmes étaient présentés sous forme de problèmes. J'ai trouvé un cahier -à l'époque, ce n'était pas si facile- j'ai écrit sur chaque page les hypothèses et les conclusions des théorèmes, et avant l'été, j'avais rempli presque toutes les pages avec leurs démonstrations. C'est ainsi que j'ai commencé à rédiger des mathématiques.

Je signale aussi un livre d'algèbre qui présentait des moyens ingénieux de résolution de *maxima* et *minima* par des méthodes élémentaires (*i.e.* sans calcul différentiel). Par exemple, comment trouver le maximum du produit ab, la somme $a + b$ étant fixée ; (ou le rectangle de surface maximale à périmètre constant) ; ou le maximum du produit $a_1a_2...a_n$ pour une somme $a_1 + a_2 + ... + a_n$ fixée (a_i positifs); ou encore le problème suivant : d'un carré de côté donné, on ôte quatre petits carrés, et on fait une boîte avec ce qui reste. Quelle est la dimension des carrés qu'on doit ôter pour avoir une boîte de volume maximal ?



La combinatoire et le binôme de Newton me firent grande impression et j'y ai longtemps réfléchi.

Je vivais dans petite ville avec une seule école. Mon instituteur était un homme très bon bien qu'il eût l'air sévère, avec ses grandes moustaches de cosaque. Je connaissais sans doute plus de mathématiques que lui, mais je n'ai jamais eu de meilleur professeur. Il m'encourageait, appréciait ce que je faisais. Encourager, n'est-ce pas le plus important pour le professeur ?

Encourager, n'est-ce pas le plus important pour un professeur ?

On manquait de livres de mathématiques. J'appris qu'il y avait des livres de mathématiques "supérieures", et je me suis imaginé les "mathématiques supérieures" comme quelque chose de très intéressant. Mes parents ne pouvaient pas m'acheter beaucoup de livres, ils n'avaient pas d'argent. Mais encore une fois, j'eus de la chance : à 15 ans, je devais aller à Odessa pour me faire opérer de l'appendicite. Je dis à mes parents que j'irais à l'hôpital à condition qu'ils m'achètent un livre de mathématiques supérieures. Ils m'achetèrent le cours de BELAEV en ukrainien, seulement le premier tome (calcul différentiel et géométrie analytique dans le plan).

Ce fut une chance aussi, car ce livre était assez simple, comme on peut deviner d'après l'introduction où on explique qu'il y a seulement trois sortes de fonctions : les fonctions "analytiques" données par des formules, les fonctions "expérimentales" données par des tableaux et des "fonctions de corrélation" (je n'appris que beaucoup plus tard ce que ce terme signifiait). Trois jours après mon opération, je me mis à lire ce livre, en même temps qu'un roman d'Emile ZOLA. Au bout de douze jours, j'avais fini les deux. De ce livre, j'appris deux idées importantes : la première c'est que tout problème de géométrie peut s'exprimer avec des formules (algébriquement). D'ailleurs, je m'en doutais déjà un peu. J'appris aussi l'existence de figures remarquables comme l'ellipse.

Les mathématiques forment un tout

La seconde idée importante : elle naquit de la découverte dans le livre d'une formule pour le sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

Avant, je pensais qu'il y avait deux mathématiques, l'algébrique et la géométrique et que les mathématiques de la géométrie sont essentiellement "transcendantes" par rapport à l'algèbre. Par exemple, la formule de la longueur de l'arc de cercle est définie par l'intermédiaire du nombre π, le sinus et le cosinus sont définis géométriquement.

Quand je découvris que le sinus pouvait aussi s'exprimer par une formule (la série précédente), la barrière tomba, les mathématiques devinrent **une**. Et depuis, j'ai toujours considéré les différents domaines des mathématiques ainsi que la physique mathématique comme **un tout**.

Enfin, j'appris aussi avec étonnement dans le livre de mathématiques supérieures que les problèmes d'*extrema* peuvent se résoudre d'une manière automatique ; ils perdent ainsi un peu de leur charme, mais nous y gagnons l'efficacité du calcul différentiel.

J'appris aussi l'existence du calcul intégral, en relation avec le calcul des surfaces et des volumes. Mais je ne pouvais pas vraiment comprendre en quoi cela consistait : je n'avais pas le second volume !

Volumes,surfaces, centres de gravité

Je voudrais citer ici un autre problème sur lequel mon camarade de classe D.MILMAN (qui deviendrait plus tard un mathématicien célèbre) attira mon attention : trouver le volume d'un solide engendré par la rotation d'un cercle autour d'une tangente. Pour résoudre ce problème j'ai divisé le cercle en petits segments, et j'ai calculé la somme des volumes des cylindres correspondants (par différence). J'en suis alors arrivé à devoir calculer la somme :

(*) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$

Finalement, il me fallut, comme c'est souvent le cas, faire preuve d'invention et de bêtise. J'obtins une solution élémentaire à l'aide des formules de trigonométrie, en utilisant la formule :

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

(la célèbre formule d'Euler, que je ne connaissais pas encore, mais que j'obtins à partir des séries pour le cosinus, le sinus et e^x). Il restait ensuite à trouver la somme de la série géométrique $e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots$ et à en déduire (*).

Avec ce problème, j'ai aussi commencé à réfléchir aux problèmes, même après les avoir résolus. Effectivement, j'écartais ensuite le cercle de sa tangente, je vis qu'on obtenait par rotation un anneau. Connaissant le rayon du cercle r et la distance d à la droite, je calculais par la même méthode qu'avant le volume de l'anneau

$(2\pi^2 r^2 d^2)$ et je m'émerveillais de la simplicité de cette formule. En l'écrivant sous la forme $(\pi r^2)(2\pi d)$, je compris que si on remplaçait l'anneau par un cylindre de hauteur la longueur décrite par le centre du cercle, on obtenait le même volume. Un résultat analogue avait lieu pour la surface de l'anneau. Je me demandais alors ce qui se passerait si on faisait tourner une autre figure, par exemple un triangle ? Dans ce cas, le volume du solide de rotation est égal à celui d'un prisme dont la base est formée du triangle, et la hauteur, la longueur de la trajectoire du point d'intersection des médianes. Je savais par la classe de physique que ce point s'appelait centre de gravité. En regardant ce qui arrive quand on fait tourner un côté, je compris que le centre du cercle est le centre de gravité, effectivement. Je trouvais dans un livre de physique la définition générale du centre de gravité, et la méthode pour calculer le volume et la surface des corps obtenus en faisant se déplacer des figures le long de lignes courbes, mais déjà cela nécessitait des méthodes plus rigoureuses. J'ai été frappé par le fait que connaissant le volume de la sphère et sa surface, on peut trouver le centre de gravité d'un demi-disque et d'un demi-cercle.

Un problème intéressant ...

Ensuite j'ai eu de la chance. Dans notre ville est arrivé un homme qui me parut extraordinaire : il avait terminé l'institut de mathématiques d'Odessa. Parmi ses livres, il y avait un cours de physique et un livre sur les déterminants (celui-ci était bon, on y parlait même des déterminants d'ordre infini). Mais je continuai à m'intéresser aux problèmes de calcul des surfaces et des volumes. J'étudiai la surface d'un segment de parabole. On est conduit au calcul de la somme :

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2$$, ce que je fis.

Ensuite, je voulus calculer la surface de la courbe analogue de degré p , autrement dit, trouver la somme $S_0 = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$.

Par analogie avec la formule :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, je décidai que S_0 est un polynôme en n de degré $(p + 1)$. Je ne m'aperçus même pas que pour calculer la surface que je cherchais, il suffisait de connaître le premier coefficient du polynôme S_0 , et j'ai commencé à chercher tous les termes. Le problème était très intéressant. D'abord, j'ai généralisé le problème : il s'agit, pour une fonction $f(x)$, de calculer

$$S_0 = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

Soit $F(x)$ une primitive de f : $F'(x) = f(x)$.

D'après la formule de Taylor, on a:

$$F(2) - F(1) = \frac{f(1)}{1!} + \frac{f'(1)}{2!} + \frac{f''(1)}{3!} + \ldots$$

$$F(3) - F(2) = \frac{f(2)}{1!} + \frac{f'(2)}{2!} + \frac{f''(2)}{3!} + \ldots$$

$$F(n+1) - F(n) = \frac{f(n)}{1!} + \frac{f'(n)}{2!} + \frac{f''(n)}{3!} + \ldots$$

D'où par addition :

$$F(n+1) - F(1) = S_0 + \frac{S_1}{2!} + \frac{S_2}{3!} + \ldots$$

où

$$S_1 = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n)$$
$$S_2 = f''(1) + f''(2) + \ldots + f''(n)$$

Ensuite j'écrivis le système

$$F(n+1) - F(1) = S_0 + \frac{S_1}{1!} + \frac{S_2}{2!} + \frac{S_3}{3!}$$

$$f(n+1) - f(1) = S_1 + \frac{S_2}{1!} + \frac{S_3}{2!} + \ldots$$

$$f'(n+1) - f'(1) = S_2 + \frac{S_3}{1!} + \frac{S_4}{2!} + \ldots$$

c'est-à-dire un système infini avec une infinité d'inconnues S_0 , S_1 , S_2 , ... Dans livre sur les déterminants, je me rappelais avoir vu des déterminants infinis, donc j'utilisais la règle de Cramer pour trouver S_0 :

$$S_0 = \frac{\begin{vmatrix} F(n+1)-F(1) & 1/1! & 1/2! & 1/3! \\ f(n+1)-f(1) & 0 & 1/2! & 1/3! \\ f'(n+1)-f'(1) & 0 & 1 & 1/2! \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{1}$$

En développant le déterminant suivant la première colonne, j'obtins:

(1) $S_0 = B_0(F(n+1)-F(1))+B_1(f(n+1)-f(n))+B_2(f'(n+1)-f'(1)+\dots$

où $B_0 = \mathbf{1}$, B_1, B_2 étaient des déterminants numériques d'ordre infini. L'expression (1) s'appelle formule d'Euler-MacLaurin. Pour la calculer, il faut connaître B_1, B_2, ... Pour cela, j'utilisai un argument qu'aujourd'hui on appellerait "fonctoriel" : en utilisant le fait que les B_i ne dépendent pas de f, je pouvais choisir une fonction f telle que je puisse calculer S_0, par exemple telle que le premier membre de (1) forme une progression géométrique :
$f(x) = e^{\alpha x}$ convient, et on obtient

$$B_0 + B_1\alpha + \alpha^2 B_2 + \dots = \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1}$$

c'est-à-dire qu'on obtient la série génératrice des B_i (les nombres de Bernoulli).

J'ai réfléchi encore à d'autres problèmes avant de venir à Moscou, l'été 1929 ; les mois qui suivirent furent très difficiles pour ma famille et moi-même, et je ne fis pas de mathématiques.

Ultérieurement, une fois arrivé à Moscou, mes réflexions ne se limitèrent pas à des "expériences" mathématiques comme celles que j'ai racontées. Je fus soumis à des influences variées, je n'étais plus seul. L'un des étudiants dont je fis la connaissance à la Bibliothèque Lénine m'expliqua que le calcul de "f(n =1) - f(n)" qui m'avait intéressé était lié à tout un domaine appelé "*théorie des différences finies*" et me suggéra de lire le livre de Norlünd sur le sujet. Le livre était en allemand mais avec un gros dictionnaire, j'en suis venu à bout.

J'ai commencé à aller aux séminaires de l'Université et j'ai été l'objet de dures pressions psychologiques : ma manière d'aborder les mathématiques ne convenait pas. En mathématiques, de nouvelles exigences de rigueur étaient apparues, on portait le plus grand intérêt aux fonctions d'une variable réelle (aujourd'hui, les deux sont un peu passées de mode, mais à l'époque ...). Ainsi, je me rendis compte de l'importance de la différence entre fonctions continues et dérivables, fonctions simplement dérivables et celles qui le sont plusieurs fois, en somme, une situation désordonnée : même si une fonction est dérivable à tous les ordres, sa série de Taylor n'en converge pas forcément pour autant, ... les fonctions analytiques, celles pour lesquelles la série de Taylor converge vers la valeur de la fonction, paraissaient alors si compliquées aux yeux des partisans des fonctions d'une variable réelle, qu'elles étaient rejetées du champ des mathématiques "intéressantes". Mais moi, elles me fascinaient ! Au point que je me suis mis à lire le manuel d'analyse de De la Vallée-Poussin, qui ressemble (mais en mieux) aux manuels qu'on utilise aujourd'hui à l'Université de Moscou, et un très bon livre sur les fonctions d'une variable complexe. Alors j'ai compris pourquoi la série de Taylor à l'origine de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ diverge pour $x = 1$ alors que son graphe est continu (la fonction complexe correspondante possède une singularité en $x = i$). Après cette lecture, je sentis comme un souffle d'air frais : je compris que pour une fonction de la variable complexe, l'existence de la première dérivée assurait, contrairement aux fonctions de variable réelle, l'existence de toutes les autres et la convergence de la série de Taylor. Tout se remettait en place, l'harmonie était retrouvée.

Je lus ensuite avec enthousiasme le livre de Courant-Hürwitz sur les fonctions elliptiques. A nouveau je m'écartais de la mode, car à l'époque on considérait ce domaine comme une variante de la trigonométrie. Il a fallu attendre de nombreuses années pour que ce sujet se trouve à nouveau au cœur des recherches de pointe.

Je m'efforce d'apprendre encore

Ces séminaires de l'Université m'ont beaucoup appris. En discutant avec de nombreux mathématiciens de goûts différents, j'ai pu comparer le point de vue, un peu romantique, que j'avais formé loin des autorités et de la mode, avec ce qui se faisait réellement, les recherches les plus avancées. J'ai appris auprès des mathématiciens les plus éminents et je m'efforce d'apprendre encore.

J'ai ensuite étudié à fond le superbe livre de Courant et Hilbert "*Méthodes mathématiques de la physique*". J'ai compris la nécessité de lire les ouvrages fondamentaux, de consacrer du temps à réfléchir aux fondements même des théories. Je travaillai ainsi sur les œuvres d'Hermann Weyl sur les représentations des groupes classiques.

Si je dois citer un seul des mathématiciens qui m'ont influencé à cette époque, c'est, bien sûr Andreï N. Kolmogorov, mon maître et ami.

J'ai appris auprès de lui qu'aujourd'hui un véritable mathématicien doit se considérer comme un naturaliste.

Mon récit commence à ressembler à une biographie classique. Le genre littéraire prête à confusion. Une vraie biographie scientifique doit être le travail d'un spécialiste. Mes réflexions sur mes propres travaux ne sont pas plus intéressantes que celles de tout autre lecteur, aussi, vaut-il mieux que j'en reste là.

Traduction et adaptation :
Jean-Michel KANTOR