les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

CONCOURS FRANCE-URSS

Monsieur R.S. TCHERKASSOV, rédacteur en chef de la revue scientifique à l'usage des enseignants de mathématiques soviétiques *"Matématika v chkolé"* propose d'organiser parmi ses lecteurs un concours consacré au 200-ième anniversaire de la Révolution Française. L'an dernier, cette revue, qui comporte une section "problèmes", avait organisé un concours avec les collègues de Bulgarie. Cette année c'est la France qui est sollicitée. C'est ainsi que nous nous sommes entendus pour un échange de 4 énoncés. Vous trouverez dans ce *Bulletin* 4 énoncés conçus par les russes et dans le suivant les 4 énoncés français qui leur ont été envoyés. Bonnes recherches ! La participation du plus grand nombre possible est attendue pour cette forme de collaboration internationale entre professeurs de mathématiques.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 161 (I. CHARYGUINE, Moscou)

Montrer qu'un système d'équations

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \end{cases}$$

aux coefficients a_i, b_i ($i = 1,2,3,4$) réels arbitraires possède au moins une solution telle que $\max_i x_i \geqslant \sqrt{2} - 1$.

ÉNONCÉ N° 162 (V. PROTASSOV, Moscou)

Une circonférence passant par des points A et B rencontre les segments [AC] et [BC] en des points K et L respectivement. Une autre circonférence tangente aux segments [CK] et [CL] est tangente aussi à l'arc KL en un point M. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ passe par le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

ÉNONCÉ N° 163 (G.V. DOROFÉEV, Moscou)

Une application $f : n \mapsto a_n$ de **Z** dans **R** vérifie les conditions :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad a_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a_n \geqslant \frac{1}{4}(a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2})$$

Montrer que f est constante.

ÉNONCÉ N° 164 (S. KONIAGUINE, Moscou)

Montrer qu'il existe une partition $\{C_1, C_2, \ldots, C_{1500}\}$ de **N** telle que toute suite de k naturels consécutifs contienne au moins un élément de l'ensemble C_{k-999}, pour $k = 1000, 1001, \ldots, 2499$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 146 (Gérard LAVAU, Mesnil-Esnard)

Comparer les nombres

$$A = \sqrt{3} + \sqrt{14 + 2\sqrt{3}}$$

$$B = \sqrt{7 + \sqrt{46}} + \sqrt{10 - \sqrt{46} + 2\sqrt{21 - 3\sqrt{46}}}.$$

SOLUTION de Daniel PECKER (Paris)

Les deux égalités suivantes sont faciles à vérifier par élévation au carré :

$$\sqrt{7+\sqrt{46}}+\sqrt{7-\sqrt{46}} = \sqrt{14+2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{10-\sqrt{46}+2\sqrt{21-3\sqrt{46}}} = \sqrt{3}+\sqrt{7-\sqrt{46}}$$

L'addition membre à membre de ces deux égalités donne $A=B$.

Autres solutions :

Jean-Pierre ACHARD (St-Etienne), Jean-Louis AYME (Montréal, Canada), Luc BARRIA (Serres Morlaas), Maurice BAUVAL (Versailles), Gérard BORIE (Fontainebleau), Guy BOUCHER (Paris), Jean BOUTE-LOUP (Rouen), Jean BRETTE (Paris), Pierre COLLAUDIN (Parray-le-Monial), Ulysse CRÉPIN (Paris), Henri DEGRUTÈRE (Chaumont), Philippe DÉLEHAM (Reims), Jean-Joël DELORME (Lyon), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Francis DREY (Curepipe, Ile Maurice), Claire ENET (Montigny-le-Bretonneux), Robert FERREOL (Paris), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg), Jacqueline et Dominique GIRAL (La Châtre), Claude JOBERT (Lyon), Nicole LADOUS (Lyon), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Hervé LUC (Ste-Foy-la-Grande), Michèle MALLÉUS (Châtenay-Malabry), René MANZONI (Le Havre), Anne et Jacques MEYER (Reims), Charles NOTARI (Noé), Dominique PERNOUX (Guebwiller), Bernard PETIT (Brest), Alain PICHEREAU (Saint-Yrieix), Yvette RAILLON (Villeneuve d'Ascq), Liliane ROUX (Firminy), Jan RUCKA (Bourges), Geneviève SAMBARD (St-Quentin), Pierre SAMUEL (Orsay), Gil SOL (Paris), Jean THÉOCLISTE (Valence), James TOUILLET (Parthenay), Geneviève VIDAL (St-Etienne), André VIRICEL (Nancy), et deux autres solutions, l'une donnant $A<B$, l'autre $B<A$. En tout, 45 lecteurs ont répondu ; un record !

Compléments

Les remarques des correspondants sont variées et intéressantes :

1) L'auteur de l'énoncé nous dit avoir puisé son idée dans le livre d'Alain BOUVIER (Lyon) *"La mystification mathématique"*, Hermann, 1981, page 59, où l'on demande si les nombres

$$A=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} \quad \text{et}$$

$$B=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

sont égaux, question qui se résoud de la même façon que l'énoncé N° 146 (voir généralisation ci-dessous). Le plus étrange est le P.S. ajouté dans l'ouvrage :

"DAVIS qui cite cet exemple affirme qu'à sa connaissance en 1981 cette question n'a pas encore trouvé de réponse".

Cela semble surprenant, s'agirait-il d'un canular ? En tout cas voilà bien un problème démystifié ! J'ai eu le plaisir de constater qu'une dizaine de lecteurs ont signalé le lien entre l'énoncé N° 146 et celui de la page 59 du livre d'Alain BOUVIER. Cela montre que cet ouvrage a été lu et que ce point a attiré l'attention.

2) La généralisation de la propriété est énoncée de diverses façons : Jean-Joël DELORME écrit :

$$A=\sqrt{b}+\sqrt{2a+2\sqrt{b}} \quad \text{et}$$

$$B=\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{a+b-\sqrt{a^2-b}+2\sqrt{b(a-\sqrt{a^2-b})}} \quad \text{où } b<a^2$$

$A=B$, l'énoncé N° 146 correspond au cas $a=7$ et $b=3$.

Edgard DELPLANCHE considère :

$$A=\sqrt{c}+\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}} \quad \text{et}$$

$$B=\sqrt{a-\epsilon\sqrt{b}}+\sqrt{a+c+\epsilon\sqrt{b}+2\sqrt{ac+\epsilon c\sqrt{b}}}$$

où $\epsilon=\pm 1$ et où a,c,b désignent des réels positifs tels que $b<a^2$. La même preuve donne $A=B$.

Dominique PERNOUX remarque que si $X=a-\sqrt{b}$ et $Y=a+\sqrt{b}$ alors le nombre $\sqrt{X}+\sqrt{Y}+\sqrt{XY}$ peut s'écrire

$$A=\sqrt{XY}+\sqrt{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2} = \sqrt{XY}+\sqrt{X+Y+2\sqrt{XY}}$$

ou $$B=\sqrt{Y}+\sqrt{(\sqrt{X}+\sqrt{XY})^2} = \sqrt{Y}+\sqrt{X+XY+2\sqrt{XYX}}$$

ou $$C=\sqrt{X}+\sqrt{(\sqrt{Y}+\sqrt{XY})^2} = \sqrt{X}+\sqrt{Y+XY+2\sqrt{XYY}}$$

Le cas de l'énoncé correspond à $a=7$, $b=46$, $XY=3$.

Les généralisations proposées par Bernard PETIT, Alain PICHEREAU, André VIRICEL sont analogues à celles qui viennent d'être données.

3) Jean-Pierre ACHARD, Robert FERREOL, Jean-Pierre FRIEDELMEYER, René MANZONI, Liliane ROUX, Pierre SAMUEL montrent que A et B sont des entiers algébriques racines du polynômes $X^4-34X^2-24X+109$.

4) Un des premiers réflexes face à l'énoncé N° 146 est de faire appel à une calculatrice pour constater que A et B sont sensiblement égaux à 5,911 058 06 (Francis DREY a obtenu 5,911 058 059 912 147...) ce qui ne permet pas de conclure. Cela conduit Claire ENET à poser cette autre question :

"Trouver des expressions du même ordre de complexité donnant des nombres distincts mais indiscernables à l'affichage sur une calculatrice".

Laissant aux lecteurs intéressés le soin d'imaginer des exemples algébriques, voici deux exemples avec des nombres transcendants :

• $\sqrt{\sqrt{\frac{2143}{22}}}$ est une bonne approximation de π donnée par RAMANUJAN. Une calculatrice affichant 8 chiffres ne suffit pas pour discerner ces deux nombres. Une a 10 chiffres montre que l'erreur est de l'ordre de 10^{-9}.

• $e^{\pi\sqrt{163}}$ est presque égal à l'entier 262 537 412 640 768 744. L'erreur commise est inférieure à 10^{-12} (cf. BOUVIER, *La mystification mathématique*, pages 60 et 61). Voilà qui nous a ramenés au livre d'où l'énoncé prenait sa source.

ÉNONCÉ N° 147 (Dominique TOURNÈS, Saint-Denis de la Réunion)

Soit un triangle ABC. Pour tout point M du plan, on désigne par I (resp. J, K) le projeté de M sur (BC) (resp. (CA),(AB)) parallèlement à (AB) (resp. (BC),(CA)). Peut-on construire à la règle et au compas les points M tels que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{IJ}$?

SOLUTION de François LO JACOMO (Paris)

Soient (a,b,c) les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle ABC, avec $a+b+c=1$.

$$\overrightarrow{AM}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KM},\ \text{dont}\ \overrightarrow{AK}=b\overrightarrow{AB}\ \text{et}\ \overrightarrow{KM}=c\overrightarrow{AC}.$$

De même $\overrightarrow{MI}=a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MJ}=b\overrightarrow{BC}$. Par suite, $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{JK}$ (qui est le double de l'aire du trapèze MKAJ) vaut :

$$\vec{MA}\wedge\vec{JK}=(b\vec{AB}+c\vec{AC})\wedge(b\vec{BC}+c\vec{AC})=b(b+2c)\ \vec{AB}\wedge\vec{AC}$$

En tenant compte des relations $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{AB}\wedge\vec{BC}=\vec{AC}\wedge\vec{BC}$.

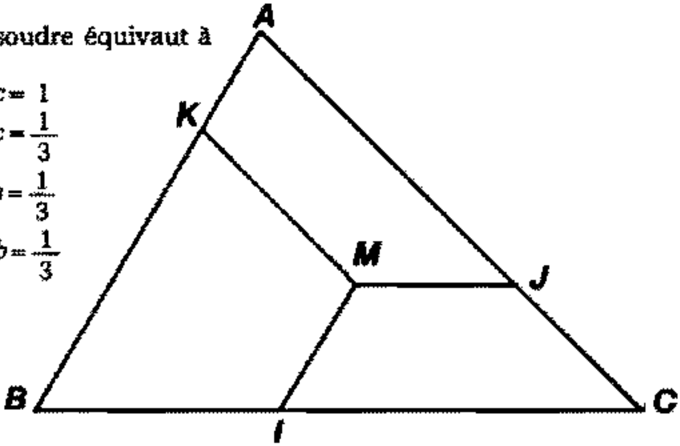
Par suite, le problème se ramène à la résolution du système :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b(b+2c)=c(c+2a)=a(a+2b). \end{cases}$$

Comme $b(b+2c)+c(c+2a)+a(a+2b)=(a+b+c)^2=1$.
(La somme des aires des trapèzes MKAJ, MJCI, MIBK est celle du triangle ABC).

Le système à résoudre équivaut à

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b^2+2bc=\frac{1}{3} \\ c^2+2ca=\frac{1}{3} \\ a^2+2ab=\frac{1}{3} \end{cases}$$



Donc $c=\frac{1}{6b}-\frac{b}{2}$, puis

puis
$$\left(\frac{1}{6b}-\frac{b}{2}\right)\left(2-\frac{3b}{2}-\frac{1}{6b}\right)=\frac{1}{3}$$

soit : $$(1-3b^2)(1-12b+9b^2)=-12b^2$$

Finalement : $$(1-3b)(9b^3-9b^2-9b+1)=0\ .$$

Il est clair que l'on a les mêmes équations en a et c . Il y a deux cas :

— ou bien $a=b=c=\frac{1}{3}$, M est alors l'isobarycentre de ABC

— ou bien a, b, c sont les racines u, v, w du polynôme
$P(x)=X^3-X^2-X+\frac{1}{9}$.

Seules trois des six permutations sont admises car $c=\frac{1}{6b}-\frac{b}{2}$, le choix de b détermine c et a. Les trois points correspondants sont les barycentres de A, B, C, affectés des coefficients (u,v,w), (v,w,u), (w,u,v).

Or le polynôme P(x) n'admet pas de racine rationnelle, car si $X = \frac{p}{q}$, supposée inductible, était racine, on aurait

$$p^3 - p^3q - pq^2 + \frac{q^3}{9} = 0$$

9 (donc 27) diviserait q^3 mais 3 ne doit pas diviser p, impossible.

Par suite le polynôme P(x) est irréductible sur $\mathbb{Q}$, donc, par le *"résultat de WANTZEL"* (cf. CARREGA, *Théorie des corps*, Hermann, page 28), les nombres u, v, w ne sont pas constructibles avec la règle et le compas.

Remarque : On peut calculer les nombres u, v, w par une méthode classique, on obtient :

$$u = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cos\frac{7\pi}{9} \approx -0{,}688059258$$

$$v = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cos\frac{5\pi}{9} \approx 0{,}101802430$$

$$w = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{9} \approx 1{,}586256828$$

La non-constructibilité des 3 solutions équivaut à celle du polygone régulier de 9 côtés, résultat obtenu par GAUSS en 1796.

Conclusion : Le problème admet 4 solutions :

— le centre de gravité du triangle, qui est intérieur et constructible,
— trois autres points, qui sont extérieurs au triangle et non constructibles avec la règle et le compas.

Autres solutions : Edgard DELPLANCHE (Créteil), René MANZONI (Le Havre), l'auteur ; et trois solutions partielles : Daniel CARON (Bruxelles), Charles NOTARI (Noé), André VIRICEL (Nancy).

Remarque : Dominique TOURNÈS nous dit avoir puisé son idée dans le livre de Alain BOUVIER déjà cité plus haut, en généralisant la question page 47 : où placer le point M pour que les trapèzes MJAK, MKBI, MICJ aient la même aire ?

ÉNONCÉ N° 148 (Roger CUCULIÈRE, Paris)

n et p étant des entiers positifs, on désigne par M_n^p la moyenne d'ordre p de la ligne numéro n du triangle de PASCAL :

$$M_n^p = \left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Trouver un équivalent simple de M_n^p lorsque $n \to +\infty$, au moins lorsque $p=1$ ou $p=2$.

SOLUTION

• *Cas* $p=1$

De $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, on déduit $M_n^1 = \frac{2^n}{n+1}$, ce qui est équivalent à $\frac{2^n}{n}$

• *Cas* $p=2$

Un exercice classique de combinatoire donne

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Utilisant la formule de STIRLING : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ *pour* $n \to +\infty$, on déduit

$$C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{puis} \quad M_n^2 \sim \frac{2^n}{\pi^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}}$$

• *Cas* $p \geqslant 3$

Ce cas est plus difficile car on ne dispose plus de formule exacte donnant simplement

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^p .$$

Les solutions reçues pêchent soit par défaut de rigueur, soit au contraire par excès de technicité conduisant à une rédaction longue et délicate à présenter ici. Contentons-nous alors, faute de mieux pour le moment, de nous appuyer sur une formule asymptotique attribuée à PÓLYA et SZEGÖ que l'on trouve à la page 141 de l'*Analyse combinatoire* de Louis COMTET (PUF, tome 2)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^p \sim \frac{2^{np}}{\sqrt{p}} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{p-1}{2}} \qquad \text{lorsque } n \to +\infty}$$

On en déduit :

$$\boxed{M_n^p \sim \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{\pi}{2np}\right)^{\frac{1}{2p}}}$$

formule qui redonne bien les résultats obtenus pour $p=1$ ou $p=2$.

Autres solutions : François LO JACOMO (Paris), Bernard PETIT (Brest). Solutions partielles : l'auteur, Édgard DELPLANCHE (Créteil), Robert FERREOL (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë).

Compléments dûs à Roger CUCULIÈRE (Paris)

$a_0, a_1, \dots, a_n$ désignant des réels positifs, on pose habituellement : $\mathfrak{M}_n^{+\infty} = \sup a_k$, $\mathfrak{M}_n^{-\infty} = \inf a_k$, et pour tout réel α non nul :

$$\mathfrak{M}_n^\alpha = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

• *Cas* $\alpha = -\infty$

On a immédiatement $M_n^{-\infty} = 1$.

• *Cas* $\alpha = +\infty$

Si n est pair, $n = 2m$, $M_n^{+\infty} = C_{2m}^m \sim \dfrac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$

d'où $\boxed{M_n^{+\infty} \sim 2^n \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}}$ lorsque $n \to +\infty$

Si n est impair, $n = 2m-1$, $M_n^{+\infty} = C_{2m-1}^m = C_{2m-1}^{m-1} = \dfrac{1}{2} C_{2m}^m$

ce qui conduit à la même formule, que l'on remarque être aussi le résultat limite pour $p \to +\infty$ de celui obtenu ci-dessus pour $\alpha = p > 0$.

• *Cas* $\alpha < 0$

On montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum (C_n^k)^\alpha = 2$, il en résulte

$\boxed{M_n^\alpha \sim \left(\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$ lorsque $n \to +\infty$

• *Enfin pour* $\alpha = 0$, si l'on pose

$$\mathfrak{M}_n^0 = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad M_n^0 = \frac{(P_n)^{\frac{2}{n+1}}}{n!}$$

où $P_n = 1^1.2^2.3^3 \ldots n^n$, dont un équivalent asymptotique s'obtient par comparaison de

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$$

avec l'intégrale $\int_1^n x \ln x \, dx = \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}$, puis en recommençant pour la série de terme

$$n \ln n - \left(\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} \right) + \left(\frac{(n-1)^2}{2} \ln (n-1) - \frac{(n-1)^2}{4} \right)$$

(cf. BOURBAKI, F.V.R. chap. V, § 4, n° 2 et n° 3).

Cela donne $\ln P_n = \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} \ln n + O(\ln n)$.

De $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi n + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, on conclut :

$\ln M_n^0 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\pi n + O\left(\frac{\ln n}{n} \right)$ et finalement :

$$\boxed{M_n^0 \sim e^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{e}{2\pi n}}}$$

COURRIER DE LECTEURS

I. *Solution tardive* : N° 141 (Jean LEMAIRE, Lille).

II. *Variantes* à la solution de Charles PEROL (Clermont-Ferrand) pour le problème N° 136 : *"Quel est l'isobarycentre des quatre centres des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle ?"* (voir *Bulletin* N° 366, page 626 et figure page 627).

1) Thierry GUIRAUD (Thourotte) procède ainsi :

Désignons par A' et A'' les milieux respectifs de $[II_A]$ et $[I_BI_C]$. L'isobarycentre G de I, I_A, I_B, I_C est le milieu de [A'A''] et appartient à (A'A''). Or (A'A'') est la médiatrice de [BC], car les cercles de diamètres $[II_A]$ et $[I_BI_C]$ passent par B et C, en raison des angles droits formés par les bissectrices en B et en C, et ont pour centres respectifs A' et A''. De même G appartient aux autres médiatrices du triangle ABC, donc est le centre du cercle circonscrit à ABC.

2) Henri BAREIL (Toulouse) écrit ceci :

I_A, I_B, I_C forment un triangle d'orthocentre I. Remplaçons I et I_A par leur milieu A' et de même I_B et I_C par leur milieu A''. A' et A'' sont diamétralement opposés sur le cercle d'Euler du triangle $I_AI_BI_C$, lequel est le cercle circonscrit à ABC (il passe par les pieds des hauteurs). Donc l'isobarycentre cherché est le centre de ce cercle.