les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

3 cas
$f \equiv 0$
$f \equiv 1$
$f(x) = x$

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 158 (d'après *Olympiades australiennes*)

naturels !

Soient n et p deux entiers pairs non nuls et f une fonction numérique telle que pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f\left[\frac{1}{n}[x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p]\right] = \frac{1}{n}\left[f(x_1)^p + f(x_2)^p + \ldots + f(x_n)^p\right]$$

Calculer le nombre $f(1989)$ sachant qu'il est plus grand que 1.

ÉNONCÉ N° 159 (Jean HAGENDORF, Orsay)

Existe-t-il une fonction strictement croissante de **R** dans **R** dont toutes les valeurs sont irrationnelles ?

ÉNONCÉ N° 160 (Dominique ROUX, Limoges)

On dira qu'une famille F d'entiers "*couvre*" un entier m si tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant m$, est somme d'une sous-famille de F. m étant donné, quel est le plus petit entier p tel que toute famille de p entiers non nuls de somme m couvre m ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 143 (André VIRICEL, Nancy)

(u_n) désignant la suite de Fibonacci (définie par $u_0=0$, $u_1=1$, puis $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$), calculer u_{2n} connaissant u_n. Exemple : calculer u_{64}, sachant que $u_{32}=2\ 178\ 309$.

SOLUTION (Pierre SAMUEL, Orsay)

Les suites de Fibonacci (suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $v_{n+2}=v_n+v_{n+1}$ pour tout n) forment, on le sait, un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est formée par les suites (a^n) et (b^n) où

$$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1{,}6180339 \quad \text{et} \quad b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})=-0{,}6180339\ .$$

Pour la suite u_n telle que $u_0=0$ et $u_1=1$, un petit calcul, pour $n=0$ et $n=1$, montre qu'on a $u_n=(a^n-b^n)/\sqrt{5}$. Ainsi $u_{2n}=(a^n+b^n)u_n$. Comme $a^n=u_n\sqrt{5}+b^n$, on a $a^n+b^n=u_n\sqrt{5}+2b^n$. Or (a^n+b^n) est une suite de Fibonacci, dont les termes $(2,1,3,4,\ldots)$ sont des entiers. D'autre part b^n tend vers 0. Plus précisément, on a $|2b^n|<\frac{1}{2}$ dès que $n\geqslant 3$. Ainsi a^n+b^n est, pour $n\geqslant 3$, l'entier le plus proche de $u_n\sqrt{5}$. Donc, pour $n\geqslant 3$ $u_{2n}=u_n\times$(l'entier le plus proche de $u_n\sqrt{5}$).

Application : Avec $u_{32}=2.178.309$, on a $u_{32}\sqrt{5}=4.870.846{,}8$. L'entier le plus proche est 4.870.847. On multiplie et on obtient :

$$u_{64}=10.610.209.857.723\ .$$

Autres solutions : Jean-Pierre ACHARD (St-Etienne), Richard ANDRE-JEANNIN (Sfax, Tunisie), Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Maurice BLANPAIN (Lille), Jean BOUTELOUP (Rouen), Jean-Claude CARREGA (Lyon), Roland CHIAVASSA (Lambesc), Daniel CHRISTY (Caen), Edgard DELPLANCHE (Maison-Alfort), Robert FERREOL (Paris), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg), Jean-Louis GARCIN (Bougival), Michel HEBRAUD (Toulouse), Bernard HERON (Orsay), Michel GARITTE

(Houplines), Michèle KILANI-CHEVALORE (Tunis), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Jean-Charles LECCIA (Annecy-le-Vieux), Thierry LEGAY (Paris), Jean LEMAIRE (Lille), Marianne LIGNAC-MARY (Montreuil), François LO JACOMO (Paris), Rémi MALCUIT (Duchesne), Pierre MANAC'H (Lorient), René MANZONI (Le Havre), Louis MORDEFROID (Lons-le-Saunier), Charles NOTARI (Noé), Bernard PETIT (Brest), Georges PIAN (Boussois), Alain PICHEREAU (Saint-Yrieix), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), André VIRICEL (Nancy).

ÉNONCÉ N° 144 (Charles NOTARI, Montant Cap Blanc)

Quel est l'ensemble des réels x tels que pour tout entier naturel n, n^x soit un entier ?

SOLUTIONS

1) ***Solution savante*** (Pierre SAMUEL, Orsay)

Soit x un nombre réel tel que n^x soit entier pour tout entier naturel n. Montrons que x *est un entier naturel*. En effet, r^x est rationnel pour tout nombre rationnel $r>0$. Or on a le résultat suivant (cf. S. LANG, *"Introduction to transcendental numbers"*, Addison-Wesley, 1966 ; chap. II, §1, cor. 2 du th. 1, p. 9) :

> "Si x est un nombre réel tel que r^x soit un nombre algébrique pour tout nombre rationnel $r>0$, alors x est rationnel".

Posons donc $x=p/q$, où p et q sont des entiers premiers entre eux. Pour $n=2$, l'hypothèse montre l'existence d'un entier m tel que $2^p=m^q$. Ainsi m est une puissance de 2, soit $m=2^s$, et on a $p=qs$, de sorte que $x=p/q$ est entier.

Il serait intéressant de trouver une démonstration moins "transcendante".

2) ***Solution*** de Bernard HERON (Orsay)

Soit $E=\{x\in\mathbf{R}/\forall n\in\mathbf{N}\ ,\ n^x\in\mathbf{N}\}$. Il est évident que $\mathbf{N}\subset E$. Nous allons montrer que $E\subset\mathbf{N}$ et donc que $E=\mathbf{N}$ via quelques préliminaires.

A chaque fonction $f:\ ]0,+\infty[\ \to\mathbf{R}$ nous associons la fonction $\Delta^1 f : t\mapsto f(t+1)-f(t)$, et pour tout entier $k\geqslant 1$ nous définissons

$$\Delta^{k+1} f = \Delta^1 (\Delta^k f).$$

Pour tout entier $k\geqslant 1$ nous avons :

$$(1)\quad \Delta^k f(t) = \sum_{j=0}^{j=k} (-1)^{k-j}\, C_k^j\, f(t+j)\ ,\quad \text{où}\quad C_k^j=\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\ ,$$

(2) si $f \in C^k\,(]0,+\infty[)$ il existe $\zeta \in]t, t+k[$ tel que $\Delta^k f(t) = f^{(k)}(\zeta)$.

La formule (1) s'obtient aisément par récurrence à l'aide des relations $C_k^{l-1} + C_k^l = C_{k+1}^l$ entre coefficients binomiaux.

La propriété (2) se montre aussi par récurrence. Le cas $k=1$ découle du théorème des accroissements finis. Supposons que (2) est vraie jusqu'à l'ordre k, $k \geqslant 1$ entier. Soit $f \in C^{k+1}(]0,+\infty[)$; il est clair d'après (1) que $\Delta^k f$ est aussi de classe C^{k+1} et que $(\Delta^k f)' = \Delta^k (f')$.

Il existe $\xi \in]t, t+1[$ tel que

$$\Delta^{k+1} f(t) = \Delta^1 (\Delta^k f)(t) = (\Delta^k f)'(\xi) = \Delta^k (f')(\xi)$$

car (2) est vraie à l'ordre 1. Puisque $f' \in C^k(]0,+\infty[)$ et que (2) est aussi vraie à l'ordre k, il existe $\zeta \in]\xi, \xi+k[\subset]t, t+k+1[$ tel que

$$\Delta^k (f')(\xi) = (f')^{(k)}(\zeta),$$

c'est-à-dire $\Delta^{k+1} f(t) = f^{(k+1)}(\zeta)$. Ceci établit la récurrence.

soit maintenant $x \in E$; choisissons un entier k tel que $k \geqslant 1$ et $k > x$, et appliquons ce qui précède à la fonction $f \in C^\infty(]0,+\infty[)$ définie par $f(t) = t^x$.

D'après (1), nous avons $\Delta^k f(n) \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ car $x \in \mathbf{E}$.

D'après (2), il existe $\zeta \in]n, n+k[$ tel que $\Delta^k f(n) = f^{(k)}(\zeta)$. Or,

$f^{(k)}(t) = x(x-1) \ldots (x-k+1)\, t^{x-k}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ vu que $k > x$. Comme $\Delta^k f(n)$ ne prend que des valeurs entières, nous devons avoir $\Delta^k f(n) = 0$ pour n assez grand, ce qui s'écrit encore $f^{(k)}(\zeta) = 0$. Mais ζ^{x-k} n'est pas nul, donc $x(x-1) \ldots (x-k+1) = 0$ en sorte que x est l'un des entiers 0, 1, ... $(k-1)$. Ceci prouve que $\mathbf{E} \subset \mathbf{N}$ et finalement que $\mathbf{E} = \mathbf{N}$.

Autres solutions : Jean-Charles LECCIA (Annecy-le-Vieux), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noé), et deux solutions fausses.

Remarque :

L'hypothèse "pour tout entier naturel n, n^x est entier" semble forte. Cherchant à la réduire, François LO JACOMO établit le résultat suivant :

Soit a un entier (aussi grand que l'on voudra) et $P(x)$ un polynôme à coefficients rationnels vérifiant :

1) $P(x)$ n'est pas une puissance entière $(n \geqslant 2)$ d'un polynôme à coefficients rationnels.

2) $\forall\, q \in \mathbf{N}$, $q \geqslant a \Rightarrow P(q) \in \mathbf{N}^*$

Alors les seuls réels x *tels que pour tout entier* q supérieur à a $[P(q)]^x$ soit entier sont les entiers naturels.

ÉNONCÉ N° 145 (Dominique ROUX, Limoges)

Pour quels entiers n, l'application qui à toute collection de n réels strictement positifs $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ associe la collection des produits deux à deux : $\{a_i a_j \ ; \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, est-elle injective ?

SOLUTION (Claude MORIN, Limoges)

On suppose $n > 1$.

1er pas : ***Linéarisation du problème***

En composant par la bijection $\ln$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, l'énoncé ci-dessus est équivalent au suivant :

Pour quels entiers n, l'application qui a toute collection de réels $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ associe la collection des sommes deux à deux :

$$\{a_i + a_j \ ; \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

est-elle injective ?

2e pas : ***Recours aux fonctions génératrices***

Supposons l'application non injective, et soient $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ deux collections distinctes telles que les collections $\{a_i + a_j\}$ et $\{b_i + b_j\}$ soient égales.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$, pour $x > 0$.

On a : $\quad [f(x)]^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{i<j} x^{a_i + a_j}$

et $\quad [g(x)]^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2 \sum_{i<j} x^{b_i + b_j}$

d'où $\quad [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = f(x^2) - g(x^2) \qquad$ (I)

Soit $h(x) = f(x) - g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x^{a_i} - x^{b_i})$. Alors $h(1) = 0$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Si pour tout entier k on avait $h^{(k)}(1) = 0$, on en déduirait

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \text{puis} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} b_i(b_i - 1),$$

d'où $$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

puis de proche en proche :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k \quad \text{pour tout entier } k\,.$$

Il en résulterait, par exemple, en utilisant les formules de Waring, que les fonctions symétriques élémentaires des réels $a_1, a_2, \ldots a_n$ d'une part et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ d'autre part, seraient deux à deux égales, et par suite que les collections $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ seraient identiques (étant les racines d'un même polynôme) ; contradiction.

Ainsi, il existe un entier p tel que $h^{(p)}(1) \neq 0$ et $h^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leqslant k < p$.

3e pas : ***Emploi de la formule de Taylor-Young***

On peut écrire :

$$h(x) = \frac{(x-1)^p}{p\,!}\,[h^{(p)}(1) + \epsilon(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 1} \epsilon(x) = 0$$

D'où l'on déduit, en partant de la relation (I) :

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = \frac{h(x^2)}{h(x)} = \frac{(x^2-1)^p}{(x-1)^p}\left[\frac{h^{(p)}(1) + \epsilon(x^2)}{h^{(p)}(1) + \epsilon(x)}\right]$$

$$= (x+1)^p \left[\frac{h^{(p)}(1) + \epsilon(x^2)}{h^{(p)}(1) + \epsilon(x)}\right]$$

D'où en faisant tendre x vers 1 : $2n = f(1) + g(1) = 2^p$, et par conséquent n est une puissance de 2.

4e pas : ***Réciproque***

Inversement, supposons $n = 2^{p-1}$ avec $p \geqslant 2$.

Posons $h(x) = (x-1)^p$ et $\begin{cases} f(x) - g(x) = (x-1)^p \\ f(x) + g(x) = (x+1)^p \end{cases}$

On a bien $[f(x)]^2 - f(x^2) = [g(x)]^2 - g(x^2)$, il s'agit de polynômes, d'où l'égalité des collections $\{a_i + a_j\}$ et $\{b_i + b_j\}$.

Explicitons :

$$f(x) = \sum_k C_p^{2k}\, x^{p-2k}\,, \quad g(x) = \sum_k C_p^{2k+1}\, x^{p-(2k+1)}$$

La collection $[a_i]$ est formée des entiers :

$p, p-2, p-4, \ldots$ pris respectivement $C_p^0, C_p^2, C_p^4, \ldots$ fois.

La collection $[b_i]$ est formée des entiers :

$p-1, p-3, p-5, \ldots$ pris respectivement $C_p^1, C_p^3, C_p^5, \ldots$ fois.

Elles sont distinctes, car leurs parités sont opposées.

Par exemple, pour $n=4$, cela donne : $[0,2,2,2]$ et $[1,1,1,3]$ (pour la forme additive du problème).

Conclusion : *L'application étudiée est injective si et seulement si n n'est pas une puissance de 2* ($n=1$ étant exclu).

Autres solutions : Deux pour lesquelles l'énoncé a été mal compris, et une troisième, fort ingénieuse de 7 pages, utilisant l'algèbre commutative et la théorie de Galois, mais n'aboutissant pas au bon résultat.

Remarque : Dans la forme multiplicative de l'énoncé, l'hypothèse *"Les réels sont strictement positifs"* est essentielle, car sinon l'application étudiée n'est jamais injective, comme le montrent les deux collections : $(1,-1,-1,\ldots,-1)$ et $(-1,1,1,\ldots,1)$ qui ont la même image.

COURRIER DE LECTEURS

1) Solutions tardives : N° 139 (Luc BARRIA, Serres-Morlaas)
N° 140 (André BELET, Rodez)
N° 141 (Jean LEMAIRE, Lille)

2) Mariannick RUELLO (Lannion) nous écrit au sujet de la question posée par Eugène EHRHART (Strasbourg) dans le *Bulletin* n° 364 page 390. Le groupe de l'IREM de Brest *"géométrie dans les classes scientifiques"* s'est intéressé aux propriétés des tétraèdres, et a retrouvé l'exemple des tétraèdres équifaciaux (tétraèdres dont les arêtes opposées sont de même longueur). Même lorsqu'il n'est pas régulier, un tel tétraèdre a sa sphère inscrite et sa sphère circonscrite concentriques. Elle ajoute : "Il nous semble que ces problèmes riches et intéressants peuvent déboucher sur des travaux dirigés, ou être décortiqués en petits exercices, pour les élèves de première et terminales. Aussi serions-nous très intéressés par d'autres thèmes de problèmes en géométrie".

3) Maurice BAUVAL (Versailles) nous fait part de ses réflexions concernant la projection de MERCATOR.

Etant donnée une surface S de révolution d'axe Oz on construit le cylindre C de révolution d'axe Oz circonscrit à S. La projection de MERCATOR est l'application qui à tout point M de S associe le point M' intersection de la demi-droite [OM] avec C. Après avoir fait cela on découpe le cylindre suivant une génératrice pour le dérouler à plat de façon à obtenir une carte plane de S.

M. BAUVAL remarque que si S est une sphère, le procédé de représentation obtenu ne conserve pas les angles, et demande quelle devrait être la surface S pour que ce procédé donne de S une représentation qui conserve les angles.

Posant $\rho = f(\theta)$ l'équation polaire de la méridienne de la surface de révolution S cherchée, un raisonnement infinitésimal élémentaire lui permet d'obtenir l'équation différentielle que doit vérifier la fonction ρ :

$$\rho^2 + \rho'^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\theta}, \quad \text{soit :} \quad \rho'^2 = \rho^2 \tan^2\theta$$

d'où : $$\frac{\rho'}{\rho} = \epsilon \tan\theta, \quad \text{puis} \quad \ln \left| \frac{\rho}{c} \right| = \epsilon \ln |\cos\theta|,$$

où c est une constante d'intégration telle que pour $\theta = 0$ on ait $\rho = \mathrm{R}$.
Finalement :

$$\rho = \mathrm{R}\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{\mathrm{R}}{\cos\theta}$$

Si $\rho = \dfrac{\mathrm{R}}{\cos\theta}$ la surface S est confondue avec le cylindre C.

Si $\rho = \mathrm{R}\cos\theta$ la surface S est un *"tore à gorge nulle"* engendré par la rotation d'un cercle autour d'une de ses tangentes. C'est aussi l'inverse, le pôle étant O, du cylindre C, or on sait que l'inversion est une transformation conforme.

4) François LO JACOMO (Paris) a remarqué une particularité du millésime 1989, qui ne s'était pas présentée depuis 1891 : 1989 *est le produit de trois entiers naturels en progression arithmétique.* Le prochain vérifiant cette propriété est 1995.

$$1891 = 1 \times 31 \times 61$$
$$1989 = 9 \times 13 \times 17$$
$$1995 = 3 \times 19 \times 35$$

Un calcul a permis à ce lecteur d'obtenir une estimation du nombre des entiers inférieurs à N vérifiant la propriété ; ce nombre vaut asymptotiquement $AN^{2/3} - BN^{1/2} + O(N^{1/3})$

où $$A = -\frac{3}{8} + \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2t} + \frac{t^2}{16}}\, dt = 1{,}05163658\ \ldots.$$

et $$B = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) = 1{,}03262658\ldots$$

à condition de compter chaque nombre avec son ordre de multiplicité, ainsi : $120 = 4 \times 5 \times 6 = 2 \times 6 \times 10 = 1 \times 8 \times 15$

et $960 = 8 \times 10 \times 12 = 4 \times 12 \times 20 = 2 \times 16 \times 30$

sont solutions triples, donc sont comptées trois fois.

ERRATA pour le *Bulletin* n° 368

Page 239 : ligne 20, lire Jean-Eric au lieu de Jean-Luc.
Page 242 : ligne 4, il faut ajouter une parenthèse.
Page 244 : ligne 21, lire inégalités au lieu de égalités.