les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 155 (Gustave CHOQUET, Antony)

On dispose d'une table ronde à quatre pieds, dont l'équilibe ne pose aucun problème sur un sol parfaitement plan. Peut-elle retrouver un tel équilibre dans une salle au plancher bosselé ?

ÉNONCÉ N° 156 (Gabriel FRAÏSSE, Ferrals-les-Corbières)

Peut-on trouver dans un réseau plan à mailles carrées deux nœuds M et N tels que $2MN = MA + MB$ où A et B sont deux nœuds opposés d'une même maille pour lesquels $MA \neq MB$?

ÉNONCÉ N° 157 (Eugène EHRHART, Strasbourg)

Quel est le rayon du plus petit cercle passant par exactement cinq nœuds d'un quadrillage à mailles carrées de côté 1 ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 140 (Denis BIGO, Vendeville)

Soit k un entier, on ordonne $\mathbf{N}^k$ par :

$$(x_1,\ldots,x_k) \leqslant (y_1,\ldots,y_k) \Longleftrightarrow \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\ ;\ x_i \leqslant y_i$$

Existe-t-il un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^k$ formé d'éléments deux à deux non comparables ?

SOLUTION de Robert CHARDARD (Les Ulis)

On démontre par récurrence sur k qu'il n'existe pas de sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^k$ formé d'éléments deux à deux non comparables. La propriété est évidemment vraie pour $k=1$.

Supposons la propriété vraie pour $k \geqslant 1$; démontrons qu'elle est vraie pour $k+1$.

Remarquons qu'il ne peut exister un nombre infini d'éléments de $\mathbf{N}^{k+1}$ $(y_1, y_2 \ldots y_{k+1})$, deux à deux non comparables et prenant la même valeur pour la i-ème coordonnée. On obtiendrait en effet alors à partir de ces éléments un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^k$ formé d'éléments deux à deux non comparables (en supprimant la i-ème coordonnée), ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse de récurrence.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^{k+1}$ formé d'éléments deux à deux non comparables. Appelons-le E.

Soit $(x_1, x_2, \ldots x_{k+1})$ un élément donné de E. Il existe un nombre fini d'éléments $(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$ de E tels que :

$$y_1 = a \leqslant x_1 \quad \text{(d'après la remarque précédente)}$$

F, le sous-ensemble des éléments $(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$ de E tels que $y_1 > x_1$, est donc infini.

Pour tout élément $(y_1, y_2 \ldots y_{k+1})$ de F, il existe un entier p $(2 \leqslant p \leqslant k+1)$ tel que : $y_p < x_p$ [puisque $(y_1, y_2 \ldots y_{k+1})$ n'est pas comparable à $(x_1, x_2 \ldots x_{k+1})$].

Comme F est infini, il existera un entier p et un sous-ensemble infini G de F formé d'éléments $(y_1, y_2 ... y_{k+1})$ deux à deux non comparables prenant la même valeur pour la p-ième coordonnée. Nous avons vu que ceci était contradictoire avec l'hypothèse de récurrence.

Il n'existera donc pas de sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^{k+1}$ formé d'éléments deux à deux non comparables.

Autres solutions : Deni BIGO (Vendeville), Dominique GAONAC'H (Le Pouliguen), Georges GRAS (Brésilley), Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), Daniel PECKER (Paris), Jean-Eric PIN (Paris) et une solution fausse.

Remarque due à Georges GRAS :

Pour $k \geqslant 2$ on peut trouver X_k formé d'éléments deux à deux non comparables, de cardinalité arbitrairement grande : par exemple, pour $k=2$ et $n \in \mathbf{N}$, $X_2 = \{(h, n-h),\ 0 \leqslant h \leqslant n\}$ est formé de $n+1$ éléments non comparables deux à deux.

Ce type d'exemple montre également que $\mathbf{N}$ joue un rôle essentiel car $\{(h, -h),\ h \in \mathbf{Z}\}$ est une partie infinie de $\mathbf{Z}^2$ formée d'éléments non comparables deux à deux ; de même pour $\{(h, 1-h), h \in [0,1]\}$ dans $(\mathbf{R}^+)^2$.

Compléments :

Voici l'intéressant courrier de Jean-Luc PIN (Paris) :

"Soit k un entier. On ordonne $\mathbf{N}^k$ par :

$(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k)$ si et seulement si, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $x_i \leqslant y_i$.

Existe-t-il un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^k$ formé d'éléments deux à deux non comparables ?";

La réponse est non, et le résultat a été redécouvert par de très nombreux auteurs. La référence la plus ancienne que je connaisse, [1], date de 1903, mais il existe très probablement des références antérieures. Le problème est relié à la théorie des "bons ordres" (cf. ce même numéro d'avril 1988 du *Bulletin* p. 140). Soit $\leqslant$ une relation d'ordre (partiel) sur un ensemble E et soit F un sous-ensemble de E. Un élément x de F est minimal dans F si, pour tout $y \in F$, $y \leqslant x$ entraîne $y = x$. La relation $\leqslant$ est un *bon ordre* si tout sous-ensemble non vide F de E admet un ensemble fini non vide d'éléments minimaux. On montre qu'il est équivalent de dire que $\leqslant$ vérifie les deux propriétés suivantes :

a) toute suite strictement décroissante d'éléments de E est finie,

b) tout sous-ensemble de E formé d'éléments deux à deux incomparables est fini. Puisque $\mathbf{N}$, muni de l'ordre habituel, vérifie (a) et (b), le problème proposé est un cas particulier de l'énoncé suivant :

Proposition. *Tout produit fini d'ensembles bien ordonnés est un ensemble bien ordonné pour l'ordre produit.*

Il existe bien d'autres propriétés des bons ordres, pour lesquelles on pourra consulter [3]. Je voudrais cependant signaler une généralisation intéressante du problème, qui repose sur la notion de "sous-mot". Par exemple, AMIE est un sous-mot de MATHEMATIQUE. Le mot TETU est également un sous-mot de MATHEMATIQUE. De façon plus formelle, on appelle *alphabet* un ensemble fini, dont les éléments sont appelés des *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres, que l'on représente par simple juxtaposition. Le nombre de lettres du mot est appelée sa *longueur*. Ainsi *abbcbcbabcb* est un mot de longueur 11 sur l'alphabet $A=\{a,b,c\}$. Le seul mot de longueur 0 (associé à la suite vide) est appelé le *mot vide*. Le mot $u=a_1...a_n$ est un *sous-mot* du mot v s'il existe des mots $v_0,...v_n$ (éventuellement vides) tels que

$$v=v_0a_1v_1...\ a_nv_n\ .$$

Il est facile de voir que la relation "u est sous-mot de v" est une relation d'ordre sur l'ensemble des mots sur l'alphabet A. On a alors :

Théorème de Higman [2]. *Tout ensemble de mots deux à deux incomparables pour l'ordre des sous-mots est fini.*

On retrouve le problème proposé en remarquant que sur l'alphabet $\{a_1,...a_k\}$, le mot $a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}...a_k^{n_k}$ est un sous-mot de $a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}...a_k^{m_k}$ si et seulement si $n_1\leqslant m_1,...,n_k\leqslant m_k$.

Démonstration du théorème de Higman (d'après [4]). Appelons *antichaine* une suite infinie $u_0,\ u_1,...$ de mots deux à deux incomparables pour l'ordre des sous-mots. S'il existe des antichaines, on peut, en utilisant l'axiome du choix, sélectionner une antichaine "optimale" au sens suivant :

(0) u_0 est un mot de longueur minimale parmi les mots u qui commencent une antichaine,

(1) u_1 est un mot de longueur minimale parmi les mots u tels que $u_0,\ u$ soit le début d'une antichaine,

(2) u_2 est un mot de longueur minimale parmi les mots u tels que $u_0,\ u_1,\ u$ soit le début d'une antichaine, etc. (Cet "etc." masque un nouvel usage de l'axiome du choix, cf. l'excellent article de Michel Bonnard sur ce sujet).

Maintenant, comme l'alphabet est fini, il existe une lettre $a\in A$ qui est la première lettre d'une infinité de mots u_i, soit $u_{i_0}=av_0,\ u_{i_1}=av_1,...,$ avec $i_0<i_1<...$ Mais la suite $v_0,\ v_1,...$ ainsi construite est également une antichaine, ce qui contredit "l'optimalité" de la suite $u_0,\ u_1,...$ □

Références

[1] DICKSON L.E., 1903, Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with r district prime factors, *Am. J. Math.*, 35, 413-422.

[2] HIGMAN G., 1952, Ordering by divisibility in abstract algebras, *Proc. London Math. Soc.*, 2, 326-336.

[3] KRUSKAL J.B., 1972, The theory of well quasi-ordering : a frequently discovered concept, *J. of Comb. Theory, Ser. A*, 13, 297-305.

[4] LOTHAIRE M., 1983, Combinatorics on words, *Encyclopedia of Mathematics and its applications* 17, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

ÉNONCÉ N° 141 (Maurice MONANGE, Ussel)

Dans tout tétraèdre, la somme des longueurs de deux arêtes opposées est-elle inférieure à celle des longueurs des trois plus grandes autres arêtes ?

SOLUTION de l'auteur

La réponse est affirmative.

Lemme : Dans tout triangle ABC de médiane AI on a :

$$BC + 2AI \leqslant \text{Inf}\,(AB, AC) + 2\ \text{Sup}\,(AB, AC)\ .$$

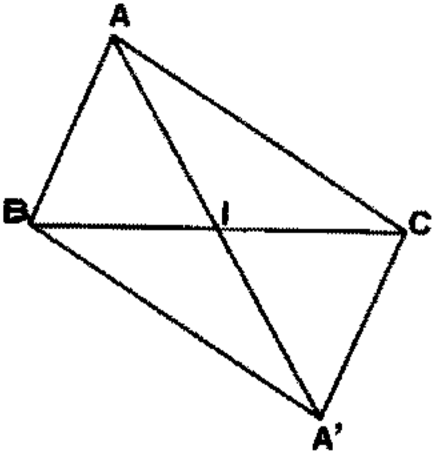


figure 1

Démonstration : Soit A' le symétrique de A par rapport au milieu I de BC (fig. 1), posons $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $AA' = d = 2AI$.

Alors : $a^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{AB}.\vec{AC}$ (1)

$d^2 = \vec{AA'}^2 = (\vec{AB} + \vec{AC})^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{AB}.\vec{AC}$ (2)

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, il vient :

$$a^2 + d^2 = 2(b^2 + c^2) \qquad (3)$$

En multipliant (1) et (2) membre à membre, il vient :

$$a^2d^2 = (b^2 + c^2)^2 - 4(\vec{AB}.\vec{AC})^2 \leqslant (b^2 + c^2)^2$$

d'où $$ad \leqslant b^2 + c^2 \qquad (4)$$

(3) et (4) donnent : $a^2 + d^2 + 2ad \leqslant 2(b^2 + c^2) + 2(b^2 + c^2)$

soit : $$(a+d)^2 \leqslant 4(b^2 + c^2)$$

Supposons par exemple $b \leqslant c$, alors $b^2 \leqslant bc$, d'où :

$$(a+d)^2 \leqslant 4bc + 4c^2 \leqslant b^2 + 4bc + 4c^2 = (b + 2c)^2$$

et par conséquent : $a + d \leqslant b + 2c$ □ (5)

L'inégalité (5) est la propriété à démontrer dans le cas du parallélogramme.

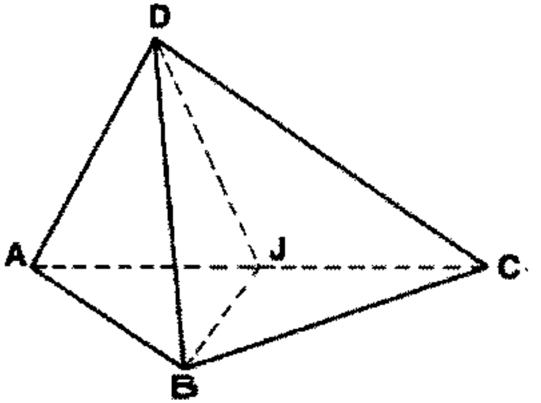


figure 2

Passons au cas général, soit ABCD un tétraèdre (fig. 2), AC et BD deux arêtes opposées, et appelons AB la plus petite des autres arêtes. Utilisons le lemme, en notant J le milieu de AC.

Dans le triangle ABC, on a : $AC + 2BJ \leqslant AB + 2BC$ (6)

Dans le triangle ADC : $AC + 2DJ \leqslant \text{Inf}(AD, DC) + 2\,\text{Sup}(AD, DC)$ (7)

En ajoutant (6) et (7) membre à membre, il vient :

$$2AC + 2BJ + 2DJ \leqslant AB + \text{Inf}(AD,DC) + 2BC + 2\,\text{Sup}(AD,DC)$$

soit :

$$AC+BJ+DJ \leqslant \frac{AB+\mathrm{Inf}(AD,DC)}{2}+BC+\mathrm{Sup}(AD,DC)$$

Or :

$$BD \leqslant BJ+DJ \qquad \text{et} \qquad \frac{AB+\mathrm{Inf}(AD,DC)}{2} \leqslant \mathrm{Inf}(AD,DC)$$

Donc :

$$AC+BD \leqslant \mathrm{Inf}(AD,DC)+BC+\mathrm{Sup}(AD,DC) = AD+DC+BC$$

ce qui établit la propriété.

Autres solutions : François LO JACOMO (Paris) et Charles NOTARI (Noë).

Remarque : L'inégalité obtenue est stricte si aucune arête n'est de longueur nulle, car l'inégalité du lemme est stricte si $b \neq 0$.

ÉNONCÉ N° 142 (André ANGLÈS, Limoges)

Soit n un entier. Quel est, en fonction de n, le plus petit réel k tel que pour tout polygone convexe de n côtés et pour tout point intérieur M, le somme des distances de M aux côtés soit inférieure ou égale à k fois la somme des distances de M aux sommets du polygone ?

SOLUTION de l'auteur

La réponse est : $\qquad k = \cos\dfrac{\pi}{n}$.

Nous allons utiliser le résultat suivant, donné par André ANGLÈS dans le *Bulletin* n° 363, page 245 :

Théorème :

On donne un triangle (PQR), de côtés p, q, r, appelé *"triangle masque"*. Pour tout triangle (ABC) et tout point M on a :

$$p^2MA+q^2MB+r^2MC \geqslant 2(qrd_A+rpd_B+pqd_C) \qquad (I)$$

où d_A, d_B, d_C désignent les *distances algébriques* de M aux côtés du triangle (ABC). De plus, l'égalité n'a lieu que si le triangle (ABC) est semblable au triangle masque et si M est le centre du cercle circonscrit de (ABC).

Pour une raison de commodité, remplaçons n par $n+1$ et considérons un polygone convexe de $n+1$ sommets : A_0, A_1, ..., A_n. Joignons A_0 à chacun des autres sommets (figure 3).

Le polygone est alors décomposé en $n-1$ triangles. Soit également $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ un polygone régulier de $n+1$ sommets. En joignant B_0 à chacun de ses autres sommets on réalise un découpage analogue en $n-1$ triangles.

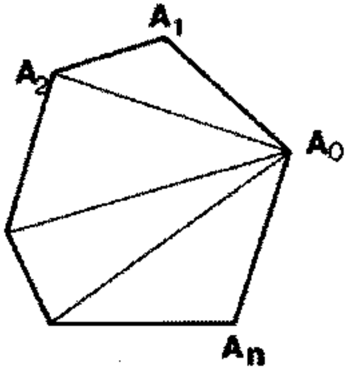


figure 3

Appliquons alors l'inégalité (I) au triangle $(A_0A_kA_{k+1})$ en choisissant pour triangle masque associé le triangle $(B_0B_kB_{k+1})$, ceci pour chacun des entiers k allant de 1 à $n-1$. On peut remplacer p, q, r par les sinus des angles opposés, qui ont pour mesures α, $k\alpha$ et $(n-k)\alpha$, où

$$\alpha = \frac{\pi}{n+1}.$$

L'inégalité (I) s'écrit alors :

$$\sin^2\alpha\ MA_0 + \sin^2(n-k)\alpha\ MA_k + \sin^2 k\alpha\ MA_{k+1} \geqslant$$
$$2[\sin\alpha \sin(n-k)\alpha\ d(M,A_0A_k) + \sin(n-k)\alpha \sin k\alpha\ d(M,A_kA_{k+1}) + \sin\alpha \sin k\alpha\ d(M,A_0,A_{k+1})] \qquad (I_k)$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité (I_k) par

$$\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha}$$

et faisons la somme des $n-1$ égalités ainsi obtenues.

Dans le membre de gauche, MA_0 se présente avec le coefficient :

$$\sin^3\alpha \left[\frac{1}{\sin\alpha \sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha}\right]$$

Remarquant que $\dfrac{1}{\sin a \sin b} = \dfrac{\text{cotan} a - \text{cotan} b}{\sin(b-a)}$, la somme entre crochets vaut :

$$\frac{\text{cotan}\alpha - \text{cotan}2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\text{cotan}2\alpha - \text{cotan}3\alpha}{\sin\alpha} + \ldots + \frac{\text{cotan}(n-1)\alpha - \text{cotan}(n\alpha)}{\sin\alpha}$$

ce qui fait $\dfrac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Le coefficient de MA_0 est donc $\sin 2\alpha$.
Puis, le coefficient de MA_1 est $\sin(n-1)\alpha = \sin 2\alpha$.

Pour $1<k<n$, le coefficient de MA_k est :

$$\frac{\sin^2(n-k)\alpha \sin\alpha}{\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha}+\frac{\sin^2(k-1)\alpha \sin\alpha}{\sin(k-1)\alpha \sin k\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}(\sin(k+1)\alpha+\sin(k-1)\alpha)=$$

$$=2\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\sin k\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Enfin, le coefficient de MA_n est :

$$\frac{\sin^2(n-1)\alpha \sin\alpha}{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha}=\sin(n-1)\alpha = \sin 2\alpha .$$

Voyons maintenant le membre de droite.

En faisant la somme, les distances algébriques $d(M,A_0A_k)$ pour $1<k<n$ disparaissent, car chacune apparaît deux fois, avec les mêmes coefficients, mais une fois avec le signe $+$, l'autre fois avec le signe $-$.

$d(M,A_0A_1)$ a pour coefficient $\dfrac{2\sin^2\alpha \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha}=2\sin\alpha$

$d(M,A_0An)$ a pour coefficient $\dfrac{2\sin^2\alpha \sin(n-1)\alpha}{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha}=2\sin\alpha$

et pour $1<k<n$, le coefficient de $d(M,A_kA_{k+1})$ est

$$\frac{2\sin\alpha \sin(n-k)\alpha \sin k\alpha}{\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha}=2\sin\alpha$$

Finalement, on aboutit à l'inégalité :

$$\sin 2\alpha(MA_0+MA_1+\ldots+MA_n)\geqslant 2\sin\alpha \sum_{k=0}^{n} d(M,A_kA_{k+1})$$

si l'on adopte la convention : $A_{n+1}=A_0$.

En conclusion, pour un polygone convexe de $n+1$ sommets on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} d(M,A_kA_{k+1}) \leqslant \cos\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} MA_k .$$

De plus, il y a égalité si et seulement si chacun des triangles $A_0A_kA_{k+1}$ est semblable au triangle masque homologue $B_0B_kB_{k+1}$ et si M est au centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire si et seulement si *le polygone est régulier et si M est en son centre.*

COURRIER DE LECTEURS

I. *Solutions tardives :*

— ÉNONCÉ N° 137 : Pierre COLLAUDIN (Paray-le-Monial)

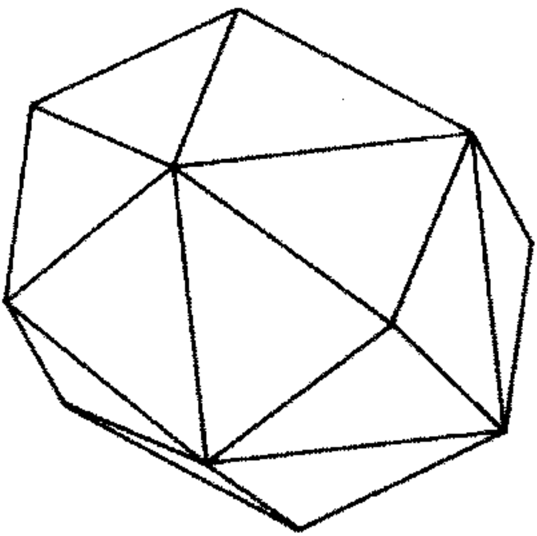
— ÉNONCÉ N° 133 : Charles NOTARI (Noë).

II. Maurice BAUVAL (Paris) propose un nouvel exemple de polyèdre convexe inscrit et circonscrit à deux sphères concentriques, mais qui n'est pas régulier. (Question posée par Eugène EHRHART dans le *Bulletin* n° 364, à la page 390, voir aussi *Bulletin* n° 367).

Il s'agit d'un polyèdre de 24 faces, 36 arêtes, et 14 sommets que l'on peut obtenir comme suit :

On part d'un cube dont les sommets ont pour coordonnées $x = \pm 1$ $y = \pm 1$ $z = \pm 1$. Il est inscrit dans la sphère centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{3}$.

Chacune des 6 faces du cube est remplacée par 4 triangles isocèles dont les bases sont les côtés de la face carrée et dont le sommet commun est à une distance de l'origine égale à $\sqrt{3}$. Bien que les 24 faces soient égales, ce polyèdre n'est pas régulier car les faces ne sont pas des triangles équilatéraux. De plus, 8 sommets sont point de concours de 6 arêtes tandis que 6 autres sommets sont point de concours de 4 arêtes.



Remarquons que le même principe peut s'appliquer aux autres solides de PLATON

III. Démonstration de la formule de "LI SHANLAN" par Jean BOUTELOUP (Rouen)

1) Cette formule est citée sans démonstration par J.C. Martzloff dans un article de *"Pour la Science"* de mai 1988 consacré à ce mathématicien chinois. Elle est signalée sans démonstration dans l'*Analyse Combinatoire* de L. Comtet (tome 1, page 179) sous le nom de formule de Li Jen-Shu. Il est dit dans l'article qu'elle fut découverte en 1937 par le mathématicien Szekeres lors d'un voyage en Chine, et qu'il essaya vainement de la démontrer. Elle fut démontrée par Turan, en 1954, en utilisant les polynômes de Legendre. Ultérieurement, des démonstra-

tions plus simples apparurent. N'en ayant pas connaissance, je ne sais pas si la démonstration ci-dessous a le mérite de l'inédit. Mais elle me paraît intéressante par l'utilisation d'un procédé qui peut être appliqué à d'autres cas.

2) Désignant par $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial encore souvent noté C_n^p, la formule en question s'écrit :

$$\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} \qquad (1)$$

En changeant n en $n-k$, la formule s'écrit aussi bien :

$$\binom{n}{k}^2 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+k-j}{2k} \qquad (2)$$

Il faut maintenant supposer $n \geqslant k$ si l'on veut que les coefficients binomiaux représentent des combinaisons. Mais cette restriction tombe, et c'est là l'idée de la démonstration, en introduisant avec la notation $\binom{x}{k}$ le polynôme $x(x-1)...(x-k+1)/k!$, et en démontrant l'égalité polynomiale :

$$\binom{x}{k}^2 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{x+k-j}{2k} \qquad (3)$$

k désignant toujours un entier strictement positif, et les polynômes étant considérés comme ayant leurs coefficients dans un corps commutatif de caractéristique nulle arbitraire, dont la nature n'intervient pas.

L'égalité des polynômes entraîne l'égalité de leurs valeurs numériques pour x entier supérieur ou égal à k, et la formule.

3) Les polynômes apparaissant sont de degré $2k$. L'égalité des coefficients de leurs termes de plus haut degré s'écrit :

$$(1/k!)^2 = (1/2k!) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2, \quad \text{soit :} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 = \binom{2k}{k}$$

C'est une égalité classique résultant de $(1+x)^k(1+x)^k = (1+x)^{2k}$ et de l'égalité des coefficients de x^k dans les deux membres.

Soit t un entier, $0 \leqslant t \leqslant k-1$; le polynôme $\binom{x}{k}$ s'annule pour $x = t$. Le polynôme $\binom{x+k-j}{2k}$ s'annule également pour cette valeur quel que soit j, $0 \leqslant j \leqslant k$; ses racines sont en effet : $j-k, j-k+1, ..., j+k-1$, et $t \geqslant 0 \geqslant j-k$, $\quad t \leqslant k-1 \leqslant j+k-1$.

Les polynômes des 2 membres de (3) admettent donc les k racines : $0, \ldots, k-1$. Or ces racines sont *doubles* pour le polynôme $\binom{x}{k}^2$. Il suffit donc de démontrer que ces racines sont également doubles pour le polynôme du 2ᵉ membre de (3) pour pouvoir affirmer l'égalité des polynômes.

4) Soit toujours t entier, $0 \leqslant t \leqslant k-1$. Posons $x-t=X$: nous obtenons au 2ᵉ membre un polynôme en X sans terme constant ; la racine t sera double si et seulement si le coefficient de X dans ce polynôme est nul.

$\binom{x+k-j}{2k} = (1/2k!).(X+t+k-j) \ldots X \ldots (X+t-k-j+1)$; $t+k-j \geqslant 0$; $t-k-j+1 \leqslant 0$. Le coefficient de X vaut :

$(1/2k!).(t+k-j) \ldots 1.(-1) \ldots (t-k-j+1) =$
$(1/2k!).(t+k-j)!(-1)^{k+j-t-1}\ (k+j-t-1)!$ (en posant $0!=1$).

Dans la relation d'annulation de ce coefficient, on peut simplifier, pour tout j, par la constante $(1/2k!)(-1)^{k-t-1}$. La sommation conduit donc à la condition d'annulation :

$$0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}^2 (t+k-j)!\,(k+j-t-1)! \qquad (4)$$

La démonstration de cette relation pour k entier strictement positif quelconque, et t entier, $0 \leqslant t \leqslant k-1$, entraîne donc la démonstration de la formule de Li Shanlan.

Cette relation peut s'écrire :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} . [(t+k-j)!/[t!(k-j)!].(k+j-t-1)!/[j!(k-t-1)!]] = 0$$

en divisant par la constante $k!t!(k-t-1)!$.

Notre relation devient ainsi :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{t+k-j}{t} \binom{k+j-t-1}{k-t-1} = 0 \qquad (5)$$

5) Comme pour bien d'autres égalités entre coefficients binomiaux, la démonstration de cette relation s'effectue aisément en utilisant la formule du binôme.

Nous introduisons le polynôme à 2 variables :

$$(y-z)^k\ (1+y)^t(1+z)^{k-t-1}$$

Ce polynôme est de *valuation k* (degré des termes de plus bas degré) ; les coefficients de tous les termes de degré inférieur ou égal à $k-1$ sont nuls. Ce polynôme s'écrit :

$$[(1+y)-(1+z)]^k (1+y)^t (1+z)^{k-t-1} =$$
$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (1+y)^{t+k-j} (1+z)^{k+j-t-1}$$

Le coefficient du terme $y^t z^{k-t-1}$ est :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{t+k-j}{t} \binom{k+j-t-1}{k-t-1}$$

Or ce coefficient est nul puisque le terme est de degré $k-1$.

La relation (5), donc la relation de Li Shanlan, est ainsi démontrée.

ERRATA

Trois erreurs se sont glissées dans la rubrique Problèmes du n° 367 :

— page 109, 9e ligne à partir du bas : lire G'D au lieu de GD
— page 113, colonne x, solution n° 7 : lire 1881 au lieu de 1680
— page 114 : supprimer les lignes 20 à 27.