Bulletin de l'APMEP n°371 - Décembre 1989

jeux et math

à propos des carrés magiques d'ordre 3

R. Duvert
Collège de Margny-lès-Compiègne

On se propose ici d'étudier les carrés magiques d'ordre 3 en fonction de leur élément central.

La démarche adoptée semble difficilement accessible à des élèves de collège, mais devrait pouvoir être abordée au lycée.

1. Notations

On ne considère que des carrés magiques contenant 9 naturels.

a	b	g
h	c	f
i	d	e

On appelle s la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne, et chaque diagonale.

Nous cherchons le nombre $N(s)$ de carrés magiques de somme donnée.

c désigne l'élément central. On a :

$$s=a+b+g=h+c+f=i+d+e=a+h+i=b+c+d=g+f+e=a+c+e=g+c+i$$

2. Premiers essais

• Puisque les 9 nombres considérés sont positifs ou nuls, il est facile de voir qu'il n'y a qu'un seul carré magique de somme 0, celui qui n'est composé que de zéros ; donc $N(0)=1$.

• Par tâtonnement (mais cela se démontre assez rapidement), on s'aperçoit qu'il n'y a pas de carré magique de somme 1, ni de somme 2 ; donc $N(1)=N(2)=0$.

• On peut, toujours "empiriquement", trouver les 5 carrés magiques de somme 3 :

$$\begin{array}{ccc}0&2&1\\2&1&0\\1&0&2\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{array}$$

On remarque que l'élément central est dans tous les cas égal à 1.

3. Premier résultat

D'où l'idée de démontrer que $\boxed{s=3c}$

En effet (par exemple) :

$$(a+c+e)+(g+c+i)+(b+c+d)=3s$$

puis, en changeant l'ordre des termes du premier membre :

$$(a+b+g)+(i+d+e)+(c+c+c)=3s$$

d'où : $\quad s+s+3c=3s \quad$ et $\quad 3c=s$.

Donc :

$$\boxed{\text{Si } s \text{ n'est pas un multiple de 3, } N(s)=0}$$

4. Réduction du nombre de paramètres

On vient de voir que lorsque s est donné, le nombre central c est déterminé ($c=s/3$). Lorsque l'on reprend les 8 égalités caractérisant un carré magique d'ordre 3, on prouve aisément que les nombres d,e,f,g,h,i sont fonction de a et de b et que la forme générale d'un carré magique d'ordre 3 et de somme $3c$ est :

a	b	$3c-a-b$
$4c-2a-b$	c	$2a+b-2c$
$a+b-c$	$2c-b$	$2c-a$

5. Conditions sur a et b

Mais nous n'avons pas encore utilisé le fait que les 9 nombres du carré sont positifs ou nuls. On en déduit alors que les 9 inégalités correspondantes équivalent aux 4 encadrements :

(1) $0 \leqslant a \leqslant 2c$
(2) $0 \leqslant b \leqslant 2c$
(3) $c \leqslant a+b \leqslant 3c$
(4) $2c \leqslant 2a+b \leqslant 4c$

On démontre ensuite que les encadrements (2) et (4) entraînent (1) et (3) ; les conditions sur a et b se résument alors à :

$$\boxed{0 \leqslant b \leqslant 2c \quad \text{et} \quad 2c \leqslant 2a+b \leqslant 4c}$$

Et donc, si s est un multiple de 3 :

N(s) est le nombre de couples de naturels (a,b) tels que $b \leqslant 2s/3$ et $2s/3 \leqslant 2a+b \leqslant 4s/3$

Remarque : On peut aussi déduire des encadrements (1) à (4) qu'aucun des 9 nombres du carré n'est supérieur à $2c$; d'où le résultat :

Les nombres composant un carré magique de somme s sont tous inférieurs ou égaux à $2s/3$.

6. Un exemple : carrés magiques de somme 6

N(6) est le nombre de couples de naturels (a,b) tels que $b \leqslant 4$ et $4 \leqslant 2a+b \leqslant 8$; on peut le chercher en se donnant b (par exemple) :

si $b=0$ alors $2 \leqslant a \leqslant 4$ d'où 3 solutions pour a
si $b=1$ alors $1{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$ d'où 2 solutions pour a
etc...

On trouve $N(6)=13$. Les carrés magiques de somme 6 sont :

2 2 2
2 2 2
2 2 2

0 4 2	2 0 4	2 4 0	4 0 2
4 2 0	4 2 0	0 2 4	0 2 4
2 0 4	0 4 2	4 0 2	2 4 0

1 2 3 4 2 0 1 2 3	3 2 1 0 2 4 3 2 1	1 4 1 2 2 2 3 0 3	3 0 3 2 2 2 1 4 1
1 3 2 3 2 1 2 1 3	2 1 3 3 2 1 1 3 2	2 3 1 1 2 3 3 1 2	3 1 2 1 2 3 2 3 1

On remarque que ces carrés, sauf le premier, forment des ensembles de 4 et que dans chaque ensemble ils se déduisent les uns des autres par une "symétrie" ou une "rotation".

7. Illustration graphique

Avant de trouver $N(s)$ par le calcul, il peut être utile de représenter graphiquement le problème. On peut considérer un repère dont les abscisses sont les naturels a et dont les ordonnées sont les naturels b. Alors, d'après les conditions sur a et b vues au paragraphe 5, les carrés magiques d'élément central c sont représentés par les nœuds du quadrillage qui sont contenus (au sens large) dans un parallélogramme limité par les 4 droites d'équations $b=0$, $b=c$, $b=2c-2a$ et $b=4c-2a$.

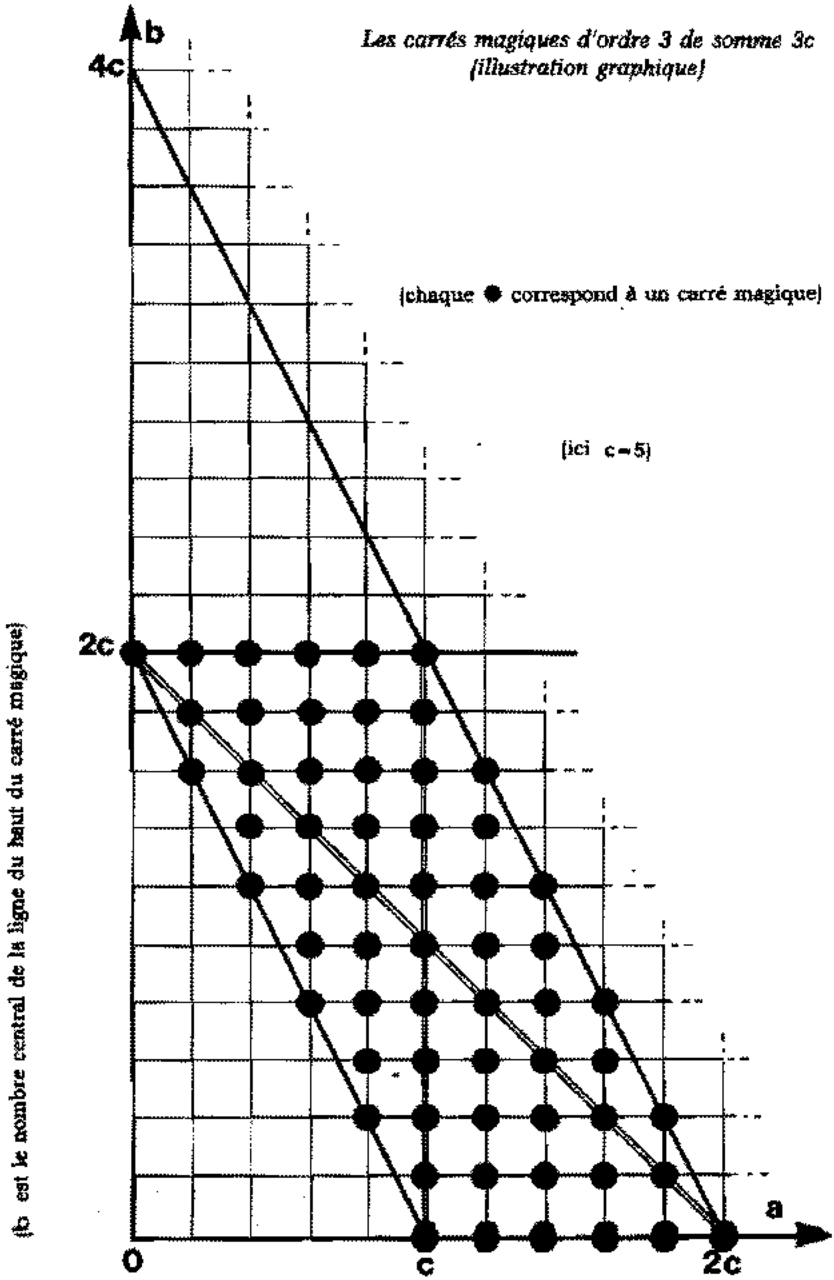
Sur la figure proposée en exemple ($c=5$), on compte 61 points répondant à la question donc $N(15)=61$.

Quel que soit c , les 4 sommets du parallélogramme correspondent aux 4 carrés magiques :

$0\ 2c\ c$ $2c\ c\ 0$ $c\ 0\ 2c$	$2c\ 0\ c$ $0\ c\ 2c$ $c\ 2c\ 0$	$c\ 0\ 2c$ $2c\ c\ 0$ $0\ 2c\ c$	$c\ 2c\ 0$ $0\ c\ 2c$ $2c\ 0\ c$

Quant au centre du parallélogramme, il correspond au carré magique "trivial" (ou "homogène") formé de 9 nombres égaux à c .

On peut aussi remarquer, par exemple, qu'il n'y a toujours qu'un seul carré magique (de somme donnée) contenant 0 en haut à gauche.



(a est le nombre situé en haut à gauche du carré magique).

Lorsqu'on approfondit l'étude des carrés magiques de somme donnée, on découvre d'autres intérêts à ces graphiques. Par exemple, les points situés sur les diagonales du parallélogramme correspondent aux carrés magiques symétriques par rapport à une de leur diagonale. Les points situés sur les "médianes" du parallélogramme correspondent aux carrés symétriques par rapport à leur deuxième ligne ou leur deuxième colonne.

8. Détermination de N(s)

On sait que $2c \leqslant 2a+b \leqslant 4c$, ce qui équivaut à $c-b/2 \leqslant a \leqslant 2c-b/2$.

Si b est impair, a peut prendre c valeurs ; si b est pair, a peut prendre $c+1$ valeurs (le graphique permet de mieux voir tout cela).

Or b varie de 0 à $2c$, donc est c fois impair et $c+1$ fois pair.

Donc $N(s) = (c+1)(c+1)+c\times c$

$N(s) = (c+1)^2 + c^2$

$$\boxed{\text{Si } s \text{ est multiple de 3, alors } N(s)=(s/3)^2+(s/3+1)^2}$$

On peut en déduire une autre expression :

$$\boxed{N(s) = 1+(2s/3)(s/3+1)}$$

On vérifie bien ce qu'on a trouvé pour N(0), N(3), N(6) et N(15), et on peut calculer que N(9) = 25, N(12) = 41, N(18) = 85, N(21) = 113, N(24) = 145, N(27) = 181, N(30) = 221, etc.

9. Si on veut aller plus loin...

On peut découvrir (on l'a entrevu au paragraphe 6) que les carrés magiques d'ordre 3 et de somme donnée, sauf un, sont groupés par 4 ou par 8. Si l'on considère alors que les carrés de chaque groupe sont "presque pareils" (ils contiennent les mêmes nombres, placés différemment), on peut se demander quel est le nombre D(s) de carrés magiques "vraiment différents"... On trouve :

$D(s) = (s/6+1)^2$ si s est multiple de 6

$D(s) = ((s+3)/6)((s+3)/6+1)$ si s est impair et multiple de 3

On peut aussi démontrer que le nombre de naturels distincts qu'un carré peut contenir est toujours impair et qu'il y a, outre le carré "trivial" contenant 9 fois le même naturel c :

$4c$	carrés contenant exactement 3 naturels distincts
$4E(c/2)$	carrés contenant exactement 5 naturels distincts
$8E(c/3)$	carrés contenant exactement 7 naturels distincts

(E(x) désignant la partie entière de x).