les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

ÉNONCÉS

Ces quatre énoncés sont ceux qui ont été envoyés à Moscou pour le concours FRANCE-URSS.

ÉNONCÉ N° 165 (François LO JACOMO, Paris)

Existe-t-il un entier naturel n admettant plusieurs diviseurs dans l'intervalle $[\sqrt{n}, \sqrt{n}+\sqrt{\sqrt{n}+\frac{1}{2}}]$?

ÉNONCÉ N° 166 (Gérard LAVAU, Mesnil-Esnard)

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = U_n - \exp(-1/U_n^2) .$$

Donner un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

ÉNONCÉ N° 167 (André ANGLÈS, Limoges)

Démontrer que la directrice de la parabole tangente aux trois côtés d'un triangle non isocèle et à la droite contenant les centres des trois cercles d'Appolonius du triangle est la droite d'Euler de ce triangle. *(Cercle d'Appolonius = cercle dont un diamètre a pour extrémités les points d'intersection des bissectrices d'un angle du triangle avec le côté opposé à ce sommet).*

ÉNONCÉ N° 168 (Dominique ROUX, Limoges)

M étant dans le plan d'un triangle ABC donné, on construit les points A', B', C', intersections des droites (MA), (MB), (MC) avec respectivement les droites (BC), (CA), (AB). Déterminer M tel que $AA' = BB' = CC'$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 149 (François LO JACOMO, Paris)

Pour tout tétraèdre, on désigne par R le rayon de la sphère circonscrite et par r le rayon de la sphère inscrite. Quel est le minimum de $\dfrac{R}{r}$?

SOLUTION (R. MANCEAU, Paris)

Si une sphère (S) coupe les plans des quatre faces d'un tétraèdre, son rayon ρ est supérieur ou égal à r.

En effet, soit s_i les aires des faces, V le volume, d_i les distances algébriques du centre de (S) aux plans des faces (telles que pour les sommets ces distances soient positives ou nulles).

On sait que $3V = \Sigma r s_i = \Sigma d_i\, s_i$.

De $d_i \leqslant |d_i| \leqslant \rho$ on déduit $\Sigma\, r s_i \leqslant \Sigma\, \rho s_i$ d'où $r \leqslant \rho$.
En appliquant cette propriété à la sphère (S) déduite de la sphère circonscrite par l'homothétie ayant pour centre le centre de gravité et de rapport $-\frac{1}{3}$, sphère qui coupe chaque face en son centre de gravité, on obtient : $r \leqslant \frac{R}{3}$. Donc $\frac{R}{r} \geqslant 3$.

De plus, on observe qu'il y a égalité lorsque le tétraèdre est régulier. La réponse au problème posé est donc : 3 .

Autres solutions : André ANGLÈS (Limoges), Edgard DELPLANCHE (Créteil), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noë), James TOUILLET (Parthenay).

ÉNONCÉ N° 150 (Olympiades 1987)

Existe-t-il un ensemble infini de points du plan tel que la distance de deux quelconques d'entre eux soit irrationnelle, et tel que chaque triplet de points détermine un triangle dont l'aire soit un rationnel non nul ?

SOLUTION de Claude MORIN (Limoges)

L'ensemble des points $A_n\ (n, n^2)$ pour $n \in \mathbf{N}$ convient :

1) $d(A_i, A_j) = |i-j|\ \sqrt{1+(i+j)^2} \notin \mathbf{Q}$ si $i \neq j$.

En effet, si $\sqrt{1+(i+j)^2} = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) = 1$, alors $\frac{p^2}{q^2} \in \mathbf{N}$, d'où $q = 1$. $1 = p^2 - (i+j)^2 = (p-i-j)(p+i+j)$ entraîne $p-i-j = p+i+j$, ce qui est impossible car $i+j \geqslant 1$.

2) $\mathcal{A}(A_i, A_j, A_k) = \frac{1}{2}\ |\det(\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_iA_k})| = \frac{1}{2}\,|i-j|\,.\,|j-k|\,.\,|k-i| \in \mathbf{N}^*$.

Autres solutions : Pierre ANDRIEU (Lignan-sur-Orb), André ANGLÈS (Limoges), Luc BARRIA (Serres Morlaas), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Robert FERREOL (Paris), Gérald GOUBY (Figeac), Bernard HÉRON (Orsay) et Alain MASSON (La Rochelle), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), R. MANCEAU (Paris), Charles NOTARI (Noë), Robert CHARDARD (Les Ulis), Daniel PECKER (Paris), Pierre RENFER (Ostwald), Pierre SAMUEL (Orsay), Joseph VENTURA (Ajaccio).

Note :

La majorité des réponses donnent l'exemple ci-dessus où les points sont contenus dans la parabole d'équation $y=x^2$.

Quelques réponses donnent des exemples bornés, contenus dans un cercle ou bien dans l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$.

Un lecteur pose la question : *L'ensemble des points du cercles trigonométrique qui ont leurs deux coordonnées rationnelles répond-il au problème ?*

S'il est bien vrai que chaque triplet de points de cet ensemble est d'aire rationnelle, la distance de deux quelconques d'entre eux n'est pas toujours irrationnelle. Par exemple, la distance de deux points diamétralement opposés vaut 2.

On peut alors songer à évacuer ce contre-exemple en ne prenant que des points du cercle situés à l'intérieur d'un même demi-cercle. Mais là encore on trouve vite un contre-exemple : $A(1,0)$ et $B(\frac{7}{25},\frac{24}{25})$, la distance de ces deux points vaut $\frac{6}{5}$, et ils sont même contenus dans un quart de cercle. On pourrait penser à restreindre l'ensemble à des arcs de cercle plus petits, mais il y aura toujours des contre-exemples en raison du

Théorème : *Dans tout arc, aussi petit que l'on veut, du cercle trignonométrique, on peut toujours trouver deux points à coordonnées rationnelles dont la distance est rationnelle.*

Démonstration : Pour tout entier n posons :

$$a=\frac{n^4-6n^2+1}{(n^2+1)^2} \quad \text{et} \quad b=\frac{4n(n^2-1)}{(n^2+1)^2} \quad \text{(trouvés après tâtonnements)}$$

De $(n^2+1)^4=(n^4-6n^2+1)^2+[4n(n^2-1)]^2$ on déduit $a^2+b^2=1$.

D'autre part $(1-a)^2+b^2 = 2(1-a) = \left(\frac{4n}{n^2+1}\right)^2$.

Donc les points $A(1,0)$ et $B(a,b)$ appartiennent au cercle trigonométrique et ont pour distance $d=\frac{4n}{n^2+1}$.

Lorsque $n\to\infty$, $a\to1$, $b\to0$, $d\to0$. Donc en choisissant n assez grand on peut rendre l'angle $\theta_n=\widehat{AOB}$ aussi petit que l'on voudra (O centre du cercle).

Soit maintenant un arc $\widehat{PQ}$ du cercle. Posons $A\widehat{O}P = \alpha$, $A\widehat{O}Q = \beta$ où $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Choisissons n assez grand pour que $2\theta_n < \beta - \alpha$. La rotation R d'angle θ_n de centre O a une matrice à coefficients rationnels : $\cos\theta_n = a$, $\sin\theta_n = b$, et les images successives de A : $A_1 = R(A) = B$, $A_2 = R(A_1)$ ..., $A_{k+1} = R(A_k)$ sont des points du cercle trigonométrique qui ont leurs deux coordonnées rationnelles. Il existe k tel que $(k-1)\,\theta_n < \alpha \leqslant k\,\theta_n$.

De $2\,\theta_n < \beta - \alpha$ on déduit $(k+1)\,\theta_n < \beta$.

Par suite l'arc $\widehat{A_kA_{k+1}}$ est inclus dans l'arc $\widehat{PQ}$, et la distance de A_k à A_{k+1}, qui est égale à $d = AB$, est rationnelle.

ÉNONCÉ N° 151 (Dominique ROUX, Limoges)

Trouver tous les couples de rationnels positifs (x,y) tels que $x^y - y^x = 1$.

SOLUTION de Georges GRAS (Besançon)

Nous proposons les 3 étapes suivantes :

(i) rappel de quelques propriétés élémentaires des "radicaux" ;
(ii) démonstration du fait que toute solution en rationnels positifs est en fait en entiers ;
(iii) résolution de l'équation en entiers positifs.

Soit $\mathbf{Q}_+^\times$ le groupe multiplicatif des rationnels positifs. Pour $\mathbf{Q}_+^\times$ et $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on dira que $a^{1/n}$ est un radical irréductible si tout diviseur $e \neq 1$ de n, $a \notin (\mathbf{Q}_+^\times)^e$.

emme. Si $a^{1/n}$ est un radical irréductible, alors son polynôme irré-tible (ou minimal) P, sur $\mathbf{Q}$, est $X^n - a$.

Soit m le degré de P ; comme P divise $X^n - a$, on a $m \leqslant n$, et il nous suffit de montrer que $m \geqslant n$. Les m racines de P dans $\mathbf{C}$ sont de la forme $\zeta_i a^{1/n}$, où $\zeta_i^n = 1$, et le module de leur produit est rationnel (c'est, au signe près, le terme constant de P) ; donc

$$\left| \prod_{i=1}^{m} \zeta_i\, a^{1/n} \right| = a^{m/n} \in \mathbf{Q}_+^\times .$$

Soit f/e, $e, f \in \mathbf{N} - \{0\}$, l'écriture irréductible de m/n. La relation $a^{f/e} \in \mathbf{Q}_+^\times$ conduit à $a^f \in (\mathbf{Q}_+^\times)^e$, d'où $a \in (\mathbf{Q}_+^\times)^e$ puisque $(e,f) = 1$; par hypothèse $e = 1$, d'où $m = nf \geqslant n$.

Corollaire. Soit $a^{1/n}$ et $b^{1/m}$ deux radicaux irréductibles tels que $a^{1/n} - \varepsilon b^{1/m} = u$, $u \in \mathbf{Q} - \{0\}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; alors $m = n = 1$.

Vu la symétrie, supposons $m \leqslant n$ et posons $a^{1/n} = \theta$: en élevant à la puissance m les deux membres de l'égalité $\theta - u = \epsilon b^{1/m}$, on obtient :

$$\theta^m - mu\theta^{m-1} + \ldots + (-u)^m - \epsilon^m b = 0,$$

et le lemme implique que le polynôme

$$X^m - muX^{m-1} + \ldots + (-u)^m - \epsilon^m b$$

est multiple de $X^n - a$. D'où $m = n$, ainsi que l'égalité de ces deux polynômes ; enfin, si $m = n > 1$, l'identification des termes de degré $m-1$ conduit (puisque $m-1>0$) à $-mu = 0$, ce qui n'est pas.

(ii) Soit (x,y) une solution, dans $\mathbf{Q}_+^\times$, de l'équation :

(1) $$x^y - y^x = 1.$$

Posons :

(2) $$x = u/m, \quad y = v/n, \quad \text{avec } (u,m) = (v,n) = 1.$$

La relation (1) s'écrit :

(3) $$a^{1/n} - b^{1/m} = 1, \quad \text{avec } a = (u/m)^v, \ b = (v/n)^u,$$

et on en déduit, pour des diviseurs convenables n' et m' de n et m, l'écriture en radicaux irréductibles suivante :

(3') $$a'^{1/n'} - b'^{1/m'} = 1, \quad \text{avec } a = a'^{n/n'}, \ b = b'^{m/m'}.$$

Le corollaire (pour $\epsilon = u = 1$) conduit à $n' = m' = 1$, soit (cf. (3) (3')) à $a = (u/m)^v \in (\mathbf{Q}_+^\times)^n$, $b = (v/n)^u \in (\mathbf{Q}_+^\times)^m$; d'où $(u/m) \in (\mathbf{Q}_+^\times)^n$, $(v/n) \in (\mathbf{Q}_+^\times)^m$ puisque (au niveau exposants) $(v,n) = (u,m) = 1$ (cf. (2)) ; pour les mêmes raisons (cette fois au niveau écriture fractionnaire), on a $u = U^n$, $m = M^n$, $v = V^m$, $n = N^m$, où $U,V,M,N \in \mathbf{N} - \{0\}$, avec $(U,M) = (V,N) = 1$; on a donc :

$$m = M^n = M^{(N^m)} \quad \text{et} \quad n = N^m = N^{(M^n)}.$$

L'inégalité "de Cantor" : $2^q > q$, pour tout $q \in \mathbf{N}$, montre que nécessairement $M = 1$ ou $N = 1$.

Si $M = 1$, il vient $m = 1$ et $n = N$, d'où l'égalité (cf. (1), (2), avec $x = U^N$, $y = V/N$) :

$$U^V - (V/N)^{(U^N)} = 1,$$

qui elle-même implique $V/N \in \mathbf{N}$, soit $N = 1$; l'autre éventualité étant analogue, on a bien achevé l'étape (ii) $(x = u,\ y = v)$.

(iii) Résolution de l'équation :

(4) $$x^y - y^x = 1, \quad x,y \in \mathbf{N} - \{0\}.$$

On souhaite faire intervenir un diviseur premier de $x-1$, ce qui exclut les cas où $x - 1 \in \{-1,0,1\}$, soit $x \in \{0,1,2\}$; comme $xy \neq 0$, il ne reste que $x = 2$ qui conduit à l'équation :

$$1+y^2=2^y, \quad y\geqslant 1 \ ;$$

pour $y=1$ on a la solution $(2,1)$, et pour $y\geqslant 2$, on obtient $1+y^2\equiv 0$ mod 4 qui est absurde.

Soit maintenant p un diviseur premier de $x-1$, $x>2$; il est immédiat de voir que l'on a $y\equiv 0 \bmod p$. Distinguons 2 cas selon que l'on peut choisir p impair ou non :

(α) *Cas* $p\neq 2$. On pose :

$$x=1+\lambda r^r,\ \ y=\mu p^s,\ \ r\geqslant 1,\ \ s\geqslant 1,\ \ (\lambda,p)=(\mu,p)=1,\ \ \lambda\geqslant 1\ ;$$

alors (4) s'écrit :

(5) $$(1+\lambda p^r)^{\mu p^s} - (\mu p^s)^{1+\lambda p^r} = 1\,.$$

On vérifie (par une récurrence classique utilisant la formule du binôme pour l'exposant p) que

$$(1+\lambda p^r)^{\mu p^s} = 1+\lambda' p^{r+s},\ \ (\lambda',p)=1\,,$$

et (5) conduit, en posant $\mu^{1+\lambda p^r}=\mu'$, à :

$$\lambda' p^{r+s} = \mu' p^{s(1+\lambda p^r)}\ ;$$

comme $(\lambda',p)=(\mu',p)=1$, les exposants de p sont égaux, et on obtient $r=\lambda s p^r$ qui conduit à l'absurdité $r\geqslant p^r$ (car $\lambda\geqslant 1$, $s\geqslant 1$).

(β) *Cas* $p=2$. Soit $\epsilon=\pm 1$ tel que l'on ait $x\equiv\epsilon \bmod 4$; posons :

$$x=\epsilon(1+\epsilon\lambda 2^r),\ \ y=\mu 2^s,\ \ r\geqslant 2,\ \ s\geqslant 1,\ \ (\lambda,2)=(\mu,2)=1,\ \ \lambda\geqslant 1\ ;$$

ici (4) s'écrit :

(6) $$(1+\epsilon\lambda 2^r)^{\mu 2^s} - (\mu 2^s)^{\epsilon+\lambda 2^r} = 1\,.$$

Comme dans le cas (α), on établit, par récurrence (et grâce à l'hypothèse $r\geqslant 2$) que :

$$(1+\epsilon\lambda 2^r)^{\mu 2^s} = 1+\lambda' 2^{r+s},\ \ (\lambda',2)=1\,,$$

et (6) conduit à $\lambda' 2^{r+s}=\mu' 2^{s(\epsilon+\lambda 2^r)}$, soit à $r+s=s\epsilon+\lambda s 2^r$.

Si $\epsilon=1$, on obtient l'absurdité habituelle, sinon on obtient :

(7) $$r=(\lambda 2^r-2)s\,,$$

d'où
$$\begin{aligned} r &\geqslant 2^r-2 \quad (\text{car } s\geqslant 1,\ \lambda\geqslant 1)\\ &\geqslant 2r-2 \quad (\text{car } 2^{r-1}\geqslant r, \text{ pour } r\geqslant 1)\end{aligned}$$

qui conduit à $r\leqslant 2$, soit $r=2$, auquel cas (7) n'est possible que pour $s=\lambda=1$, ce qui fournit la solution $(3,2)$.

En résumé, les solutions dans $\mathbb{Q}_+^\times$ à l'équation proposée sont (2,1) et (3,2).

Autres solutions : André ANGLÈS (Limoges), Bernard HÉRON (Orsay), François LO JACOMO (Paris), et deux solutions incomplètes.

Remarque : Dans la solution ci-dessus, l'étape (iii) peut être traitée un peu plus rapidement en employant l'analyse, de façon semblable à ce qui avait été fait pour résoudre l'énoncé N° 87 (cf. *Bulletin* N° 338 page 267). L'idée est de se ramener à l'étude d'un petit nombre de cas, en écartant les couples (x,y) tels que $y > x \geqslant 3$.

Compléments

François LO JACOMO (Paris) étudie plus généralement l'équation $x^y - y^x = \alpha$ où x, y, α sont des rationnels positifs (strictement).

Le cas le plus intéressant est celui où $x > 1$ et $y > 1$. Il obtient alors la liste complète des rationnels α de la forme $x^y - y^x$ compris entre 0 et 10^{10}. Il y en a exactement 151 (coïncidence !) qui vont de 1 $(x=3, y=2)$, 2,9375 $(x=4, y=\frac{3}{2})$... à 8881781072,... $(x=\frac{5}{2}, y=25)$.
Cette liste peut être envoyée sur simple demande (offre limitée aux dix premières demandes).

COURRIER DE LECTEURS

I. Dans le *Bulletin* 366, trois solutions : N° 134, 135, 136 apparaissaient sans référence. Leur auteur a été retrouvé : il s'agit de Jean BOUTELOUP de Rouen.

II. Solutions parvenues après rédaction de la rubrique :

- Michel LAFOND (Dijon) : N° 140, 143,146
- Daniel PECKER (Paris) : N° 143, 144, 148
- Bernard HÉRON (Orsay) : N° 148
- Claude MORIN (Limoges) : N° 146, 148 (partiel).

III. Aux 43 solutions au problème historique données par François LO JACOMO dans le *Bulletin* N° 367, Robert CHARDARD (Les Ulis) ajoute les 7 solutions suivantes :

x	y	z	A	B	C
12096	3330	8528	188 221 058	41 907 842	30 818 942
13072	7854	11904	272 572 450	101 695 266	40 009 950
16065	13464	14248	450 226 625	192 142 400	10 863 104
20064	2952	17290	556 393 298	153 829 202	145 114 898
7347	7920	37604	792 372 017	738 393 608	675 667 208
6601	9840	40920	929 209 201	885 636 000	788 810 400
29920	14586	14952	1 113 363 250	218 156 850	5 405 454

IV. Richard André JEANNIN (Sfax, Tunisie) et R. MONCEAU (Paris) proposent d'autres démonstrations pour la "formule de LI SHANLAN" (*Bulletin* N° 368 page 246). La seconde repose sur la résolution de l'équation différentielle :

$$x(1-x)y'' + [1-(2k+3)x]y' - (k+1)^2 y = 0$$

que l'on transforme par $y = (1-x)^{-2k-1} z$.

V. Michel CHAMBON (Masny) nous propose la communication suivante. Il aimerait savoir si ces relations ont déjà été exploitées en arithmétique :

Deux identités remarquables

a et b étant deux entiers quelconques et n un nombre premier supérieur à 3, en désignant respectivement par s_2 et s_3 les nombres $s_2 = a^2 + ab + b^2$ et $s_3 = ab(a+b)$, on a :

• *pour n premier de la forme $6m-1$*

$$(a+b)^n - a^n - b^n = n s_2 s_3 \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{6}} \frac{1}{2i-1} C^{2(i-1)}_{\frac{n-(2i+1)}{2}} s_2^{\frac{n-(6i-1)}{2}} s_3^{2(i-1)}$$

• *pour n premier de la forme $6m+1$*

$$(a+b)^n - a^n - b^n = n s_2^2 s_3 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{6}} \frac{1}{2i-1} C^{2(i-1)}_{\frac{n-(2i+1)}{2}} s_2^{\frac{n-(6i+1)}{2}} s_3^{2(i-1)}$$

Ces formes "découvertes" par l'auteur sont-elles déjà connues ? Si oui, prière de le communiquer soit par la voie du *Bulletin*, soit à l'adresse de l'auteur :

Michel CHAMBON
35, avenue du 8 Mai 1945 - 59176 MASNY

Nota : Si $a=b$, on obtient, après élimination de la valeur commune des deux membres,

n premier de la forme $6m-1$:

$$2^n - 2 = 6n \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{6}} \frac{1}{2i-1} C^{2(i-1)}_{\frac{n-(2i+1)}{2}} 3^{\frac{n-(6i-1)}{2}} .4^{(i-1)}$$

n premier de la forme $6m+1$:

$$2^n - 2 = 18n \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{6}} \frac{1}{2i-1} C_{\frac{n-(2i+1)}{2}}^{2(i-1)} 3^{\frac{n-(6i+1)}{2}} .4^{(i-1)}$$

où l'on reconnaît, au premier membre, l'expression de Fermat $2^n - 2$ toujours divisible par n premier impair.