informatique

imagiciels pour la classe de seconde*

par l'équipe du CREEM-CNAM
Paris

Depuis l'introduction dans l'enseignement de l'outil informatique, on a vu se développer en mathématiques, parallèlement au classique "didacticiel" (logiciel tutoriel avec analyse de réponses plus ou moins "intelligente", qui s'utilise individuellement), une autre forme de logiciel, baptisée par ses pionniers "imagiciel".

L'idée directrice est de faire fournir par la machine, de façon interactive, des images que le professeur intègre dans son enseignement. Ces logiciels sont bien adaptés à l'utilisation collective. Le rôle de l'ordinateur est de donner des illustrations nombreuses, de favoriser le débat collectif et la formulation de conjectures, d'aider l'élève à se forger des images mentales. Contrairement à un logiciel tutoriel, un tel type de logiciel ne se suffit pas à lui-même ; il ne prend son sens que grâce aux activités que le professeur construit autour de lui.

Notre équipe au CREEM (Centre de Recherches et d'Expérimentations pour l'Enseignement des Mathématiques) dirigée au CNAM à Paris par le professeur Jérôme Chastenet de Géry et Serge Hocquenghem, consacre depuis plusieurs années, avec la collaboration de l'IREM de Paris VII, une part importante de son activité à une recherche sur ces nouveaux outils.

---

* Ces travaux ont été présentés lors des journées nationales de Rouen en octobre 1988.

1. L'ensemble élaboré pour la classe de seconde

1. a) *L'origine du projet*

Dans un premier temps, les imagiciels ont été produits un peu au hasard des idées et des besoins éprouvés par leurs auteurs. Il en est résulté un saupoudrage de l'ensemble des contenus des programmes de mathématiques, qui, s'il montrait bien l'intérêt de l'outil, présentait un aspect dispersé assez frustrant pour les utilisateurs. L'idée est donc venue de tenter d'illustrer par des imagiciels l'ensemble du programme de mathématiques à un niveau donné.

En accord avec la Direction des Lycées et Collèges du Ministère de l'Education Nationale qui, dans le cadre de son Programme National d'Innovation Pédagogique, a soutenu ce projet et nous a fourni des moyens, nous avons retenu pour ce travail le niveau charnière de la classe de seconde.

Notre objectif était de prouver la faisabilité d'une telle intégration de l'outil ordinateur dans le quotidien de la classe de mathématiques.

Très vite, nous nous sommes rendu compte que cette intégration complète nous entraînait plus loin que l'élaboration de logiciels accompagnés de quelques propositions d'utilisation.

Le souci de n'utiliser la machine que lorqu'elle apportait manifestement quelque chose par rapport au tableau noir traditionnel nous a conduis à repenser le cours de seconde dans l'optique "imagiciel". Il y a eu interaction entre les logiciels et les idées qu'ils illustraient, ce qui a parfois amené un éclairage différent du contenu lui-même. Les progrès rapides d'équipement des établissements scolaires qui disposent tous à l'heure actuelle d'un matériel (nanoréseau et/ou machines de type PC) permettant à celui qui le désire d'intégrer l'outil ordinateur dans son enseignement, ont été pour nous une forte incitation à montrer la possibilité de réussite de l'entreprise.

b) *Description de l'ensemble réalisé*

Notre but est donc de pouvoir fournir à tout professeur de mathématiques qui le souhaite un ensemble cohérent et autonome expérimentable directement dans sa classe. Le contenu, conforme au programme officiel, a été classiquement divisé en chapitres, chaque chapitre comprenant un ensemble de logiciels et un document écrit. Les logiciels sont des imagiciels destinés à être utilisés avec toute la classe ou en petits groupes en travaux dirigés. Ils utilisent largement les possibilités graphiques de la machine, la couleur, l'animation. Ils sont pilotés par le professeur ou par un élève au moyen de commandes simples ne nécessitant aucun apprentissage préalable. Le document écrit contient le cours et les exercices et explique comment chaque logiciel peut s'intégrer dans le déroulement de l'enseignement. Documents papiers et logiciels se complètent l'un l'autre, aussi bien pour la présentation de notions nouvelles que pour les exercices d'application et les activités de synthèse.

c) *L'état du travail*

Une première version de cet ensemble est actuellement achevée. L'année scolaire 1988-1989 a permis son expérimentation, conduite sur treize sites de la région parisienne par des membres de l'équipe et des professeurs volontaires.

Par ailleurs un exemplaire de certains chapitres (fonctions et homothéties) a été envoyé par le Ministère de l'Education Nationale au responsable logiciel dans chaque rectorat. L'objectif de cet envoi est de permettre à tous les professeurs de mathématiques qui le désirent de prendre connaissance de ce travail et de l'expérimenter dans leur classe, étant entendu que nous attendons en échange un certain retour de leur part. Ce sont généralement les centres de formation académiques qui se chargent de diffuser ces premiers documents. L'ensemble du document (écrits et logiciels) est en cours d'édition au CNDP. Il est prévu qu'un spécimen en soit fourni dans chaque lycée pour la rentrée 90. La possibilité de fabriquer un livre destiné aux élèves est en cours d'étude. L'adaptation en fonction des nouvelles directives pour la seconde, ainsi qu'un prolongement à la classe de première sont en cours de réalisation.

d) *Quelques pistes de réflexion*

A l'heure actuelle, dans le cadre de notre expérimentation, ainsi que dans l'équipe de René Jaffard à la MAFPEN de Lyon, une réflexion est menée sur les problèmes que pose une telle utilisation de l'outil informatique. Nous sommes conscients qu'il y a une part de risques que seules la réflexion et l'expérimentation permettront d'apprécier. Il faut étudier de près le rôle que joue ici l'ordinateur. La crédibilité qu'il suscite est-elle sans danger ? Quelle est la nature de l'affirmation mathématique venue de la machine ? Que faire de l'évidence mathématique fournie par l'ordinateur ? Ne peut-on pas prévenir des dangers de ce type en liant l'utilisation d'imagiciels à une initiation à l'informatique ?

D'autre part, on a encore peu de recul sur l'assimilation possible par l'élève de cette multitude d'images. Que retiendra-t-il ? Saura-t-il faire un tri et se forger, à partir des matériaux proposés, les images mentales qui l'aideront effectivement ? Ne risque-t-il pas de n'en conserver que l'idée d'un gadget d'enseignement ?

Enfin, il faut mesurer l'investissement demandé à l'enseignant pour apprendre à gérer sa classe avec cet outil nouveau, en particulier pour ce qui est du temps. Le temps nécessaire pour s'approprier les notions est considérable, et laisser les élèves se poser les questions prend plus de temps que de leur fournir prématurément les réponses.

L'utilisation collective de l'ordinateur ne résoudra pas d'un coup tous les problèmes qui se posent à l'enseignant de mathématiques de seconde.

Mais nous pensons qu'à faible coût (l'équipement d'une salle "imagiciel" ne nécessite qu'un ordinateur, PC ou même MO5, avec un grand téléviseur), il y a là un réel moyen de développer chez nos élèves l'imagination, le sens critique, l'aptitude à débattre de ses opinions avec les autres. L'important travail de découverte des notions, de création d'images mentales, d'énoncé et de validation ou d'infirmation de conjectures qu'il serait souhaitable de mettre à la base de notre enseignement peut en être facilité.

Tout en gardant la totale maîtrise de la gestion de sa classe, et en choisissant selon sa sensibilité les images à présenter (de même qu'il choisit dans un manuel les exercices qu'il pose), le professeur trouvera en la machine un allié puissant.

L'ordinateur est capable de fournir un travail (dessin, calcul) que le professeur n'est pas, lui, capable de faire sur le champ. Inversement, le professeur a un rôle que l'ordinateur ne peut évidemment assurer. Souhaitons que s'installe entre l'enseignant et ce personnage nouveau dans la classe une réelle collaboration, au bénéfice des élèves.

2. Un exemple : le chapitre BARYCENTRES

a) *Construction du chapitre*

Les imagiciels ont été utilisés ici :
— pour *introduire* la notion (imagiciel de simulation) ;
— pour l'*approfondir* (étude de l'application :
$M \to M'$ défini par $\overrightarrow{MM'} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$) ;
— pour l'*illustrer* et pour donner à *manipuler* (imagiciels Bary2 et Bary3).

Le plan du chapitre est classique, mais s'est trouvé influencé par l'utilisation de l'ordinateur :

I - Introduction : étude du point d'équilibre d'une balance (imagiciel Balance)

II - Barycentre de deux points :

1. Résolution de l'équation $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, définition du barycentre.
2. "Expression réduite" de $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$, justification par l'imagiciel Leibniz.
3. Propriétés du barycentre à partir des résultats des para-

graphes précédents).

4. Bilan et consolidation (imagiciel Bary2).

III. Barycentre de trois points (comme généralisation du précédent) :

1. Résolution de l'équation $a\,\vec{MA}+b\,\vec{MB}+c\,\vec{MC}=\vec{0}$.
2. Propriétés du barycentre :
— $a\,\vec{MA}+b\,\vec{MB}+c\,\vec{MC}=(a+b+c)\,\vec{MG}$
— homogénéité, propriétés diverses ;
— en activité : méthode dite "du barycentre partiel" (hors programme peut-être, mais tellement utile, et illustrée dans Bary3).
3. Bilan et consolidation : imagiciel Bary3, et, en exercice complémentaire, le centre d'inertie d'un solide.

b) *Activité introductrice : imagiciel Balance*

L'imagiciel Balance est un des rares logiciels de simulation que nous ayons écrit. Il représente une "balance" (de masse nulle, dans le champ de l'attraction terrestre...) dont le fléau repose sur deux supports.

Sur ces deux plateaux (A et B), sont placées deux masses (a et b). Il faut déplacer le pivot M pour que la balance, une fois les supports enlevés, reste en équilibre. L'ordinateur permet de recommencer jusqu'à l'obtention de la position correcte. Il affiche les masses a et b et les longueurs MA et MB.

L'élève doit d'abord s'appuyer sur son intuition pour trouver la position de M ; il induit ainsi quelques règles simples (par exemple M est plus près de la masse la plus importante) et il s'en imprègne d'autant mieux qu'il les pratique. On lui demande ensuite, à partir d'un certain nombre de mesures qu'il va faire lui-même, de conjecturer une loi quantitative qui permettra de prédire la position de M en fonction de a et b, et de vérifier cette loi dans les cas particuliers.

Ensuite on mathématise avec lui afin d'arriver à : $a\,\vec{MA}+b\,\vec{MB}=\vec{0}$. L'élève retourne alors à son cahier : résolution classique de l'équation dans des cas simples.

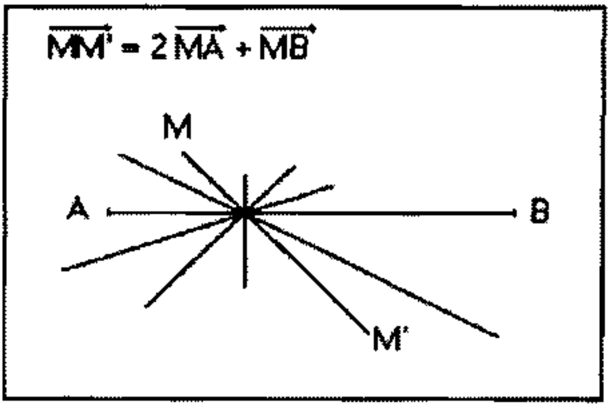
Enfin, on termine par l'opération inverse ; à quoi correspond la solution de l'équation $\vec{MA}+4\,\vec{MB}=\vec{0}$? et celle de $5\,\vec{MA}-3\,\vec{MB}=\vec{0}$? (en laissant débattre les élèves du cas des coefficients négatifs).

Grâce à l'ordinateur l'élève a eu une première visualisation du barycentre, et il l'a manipulé (bien sûr, cette image est encore limitée, mais il en aura d'autres). Il a mathématisé un problème, a émis des conjectures, les a vérifiées, et a étudié les cas particuliers.

c) *Imagiciel Leibniz*

Cet imagiciel présente une situation où l'outil vectoriel et le barycentre vont intervenir pour résoudre un problème de géométrie classique.

Sur l'écran sont dessinés deux points fixes A et B, un point mobile M (que l'on déplace en intervenant sur les touches du clavier) et le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$ (a et b ayant été choisis précédemment par l'utilisateur). Le segment [MM'] est tracé et se déplace avec M et M'. On peut laisser sur l'écran les dessins de tous les segments [MM'] que l'on désire afin de conjecturer la propriété attendue. On peut en outre vérifier graphiquement la figure tracée en demandant l'affichage des vecteurs $a\,\overrightarrow{MA}$ et $b\,\overrightarrow{MB}$ et de leur somme.



Un des intérêts de l'utilisation de l'imagiciel c'est que, plutôt que d'énoncer un résultat, on peut ici d'abord *illustrer* la propriété, la faire découvrir et la faire *formuler par l'élève* (afin qu'il la comprenne bien) avant de la démontrer sous une forme simple.

Quand on manipule cet imagiciel avec des élèves, l'effet est immédiat ; pour $a+b\neq 0$, tous s'aperçoivent que les droites (MM') ont un point commun. Il faut encore qu'ils énoncent cette propriété, puis qu'ils la traduisent en termes mathématiques. C'est souvent difficile, mais le professeur est là pour les aider. La discussion en classe est souvent intéressante ; la visualisation de la propriété, qui s'écrira pour eux $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$, est fructueuse ; elle permet que cette égalité, qui n'est souvent pour eux qu'une écriture bien pratique dans certains calculs, prenne une dimension géométrique. Elle permet aussi de leur montrer qu'une expression comme $a\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}$ se simplifie si on fait intervenir le barycentre, ce qui est un des résultats à retenir du chapitre.

Après que, guidés par leur fiche de TD, ils ont fait une démonstration, on leur propose le cas particulier $a+b=0$, qui est lui aussi très parlant à l'écran : le vecteur $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$ est constant ! Ça surprend, ça étonne, on en discute, on le démontre, et, espérons-nous, on retiendra cette image.

d) *Activités bilan et consolidation : imagiciels Bary2 et Bary3*

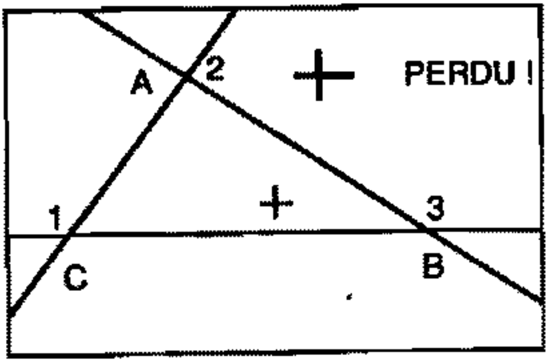
L'imagiciel Bary2 présente deux points A et B, le barycentre G de (A, a) et (B, b) dessiné sur la droite (AB) et repéré par son abscisse pour les cas où il est hors de l'écran. Les élèves manipulent les coefficients a et b, et observent les variations de G en fonction de a et b.

Pour guider leurs observations la fiche de TD leur propose plusieurs activités : trouver a et b pour que x_G prenne telle ou telle valeur, pour que G soit dans le segment [AB], à l'extérieur, à droite de B, à gauche de A...

L'objectif est que les élèves établissent un lien entre les coefficients a et b et la position de G ; qu'ils sachent, par exemple, par la suite, utiliser les résultats suivants : G est plus près de A que de B si et seulement si $|a|>|b|$; G est entre A et B si a et b ont le même signe, à l'extérieur sinon, etc.

L'imagiciel Bary3 présente une situation analogue avec trois points pondérés (A,a), (B,b), (C,c). Les objectifs sont les mêmes que pour Bary2, mais la situation est plus compliquée. Notons qu'ici la propriété dite "d'associativité du barycentre" ou "méthode du barycentre partiel" peut être largement utilisée et trouve une illustration probante. Bary3 contient enfin un jeu de cible : un point G est donné sur l'écran ; il faut manipuler les coefficients pour amener le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) en G. Ce n'est pas toujours facile et on peut penser que les élèves qui y arrivent correctement ont acquis des images efficaces du barycentre.

e) *A quoi servent les imagiciels ?*



But du jeu :
placer le point mobile (croix fine)
sur la cible (croix épaisse)
en agissant sur les coefficients.

Dans le cadre de l'exemple de ce chapitre, on peut dire qu'un imagiciel sert à faire des mathématiques : faire des expériences, conjecturer une loi, la vérifier, la démontrer, c'est faire des mathématiques.

Découvrir une propriété, la traduire en termes mathématiques, la discuter, examiner les cas particuliers, c'est faire des mathématiques.

Manipuler, utiliser ses connaissances théoriques pour prévoir, puis pour commander les déplacements du point G, c'est aussi faire des mathématiques.

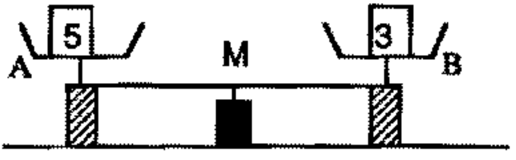
ANNEXE 1

INTRODUCTION :
Activité 1 (utilisant le logiciel BALANCES)

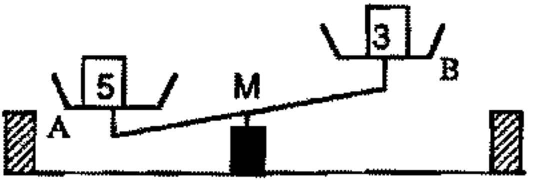
Dans l'expérience qui suit, on considère une balance située sur la terre et soumise à l'attraction terrestre (attention, les choses seraient bien différentes dans une fusée en état d'apesanteur par exemple).

Schématiquement, elle est composée de deux plateaux (A et B) reliés par une barre rigide.

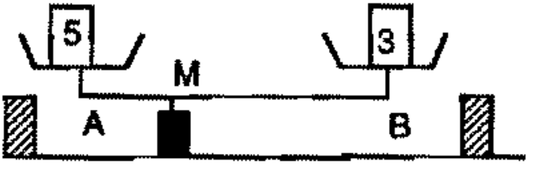
L'ensemble est posé sur un pivot (appelé M) et, au départ, soutenu par deux supports.



Lorsqu'on retire les supports, l'ensemble bascule...



sauf si le pivot est placé exactement au point d'équilibre.



Le problème est de trouver le point d'équilibre. Dans un premier temps, on va faire des expériences. Mais l'objectif est de trouver une loi qui permette de prédire la position de M en fonction des masses placées sur les plateaux.

Si l'on n'a pas accès à un matériel aussi sophistiqué (!) que celui décrit ici, on peut utiliser le logiciel *"Balances"*. Il représente une expérience similaire, mais dans une situation idéale. Les plateaux et la barre sont considérés de masse négligeable par rapport aux masses qui sont posées sur les plateaux ; il n'y a pas de frottements. Ainsi, on peut considérer que les seuls paramètres qui vont influer sur la position de M sont les deux masses posées en A et B. Le logiciel ne triche pas ; il réagit comme réagirait à sa place et dans les mêmes conditions idéales une balance comme celle présentée plus haut.

La barre AB est, pour des raisons de commodité, graduée, ce qui permet de repérer la position du point M dans le segment [AB].

1°) ***Avec le logiciel :*** Après avoir essayé la balance, essayer de placer le point M en laissant choisir les masses au hasard par la machine.

2°) Essayer de prédire les points d'équilibre, puis vérifier avec le logiciel, dans les cas suivants :

- 2 kg en A et 2 kg en B ;
- 4 kg en A et 2 kg en B ;
- 20 kg en A et 20 kg en B ;
- 2 kg en A et 1 kg en B.

3°) Remplir (avec le logiciel, au moins pour vérifier) un tableau comme le tableau suivant où a représente la masse mise en A et b, celle mise en B. Le faire aussi longtemps que nécessaire, jusqu'à ce que se dégage une formule permettant de prédire la position de M en fonction de a et de b.

a	MA	b	MB

Vérifier toute conjecture avec le logiciel.

4°) Vérifier que, quand on dispose les masses de a en A et b en B, il existe un point d'équilibre vérifiant la relation vectorielle : $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

5°) Le problème mathématique se ramène donc au problème suivant : pour placer M sans avoir besoin de faire l'expérience, il faut résoudre l'équation (car c'est une équation) : $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ où l'inconnue est un point (ici, M) du plan.

Plaçons nous dans le cas $a = 5$ et $b = 3$, et considérons l'équation suivante : $5\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

a) *Résolution* : en écrivant $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, montrer que l'équation n'a qu'une solution (que l'on appellera G), et que cette solution vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BA}.$$

b) *Vérification* : faire une figure, placer G, tracer les vecteurs $5\,\overrightarrow{GA}$ et $3\,\overrightarrow{GB}$ et vérifier que leur somme est nulle.

6°) a) Résoudre de la même manière les équations suivantes :

$2\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{MA} + 4\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Faire de même avec l'équation $5\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. La solution est-elle dans le segment [AB] ? Pouvez-vous trouver une situation similaire à celle de la balance qui donnerait ce point comme point d'équilibre ?

ANNEXE 2

2) "Expression réduite" de $a\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$

Activité 2 (utilisant le logiciel LEIBNIZ)).

A - Soient deux points distincts A et B du plan. On considère l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. L'objet de cet exercice est l'étude de cette application notée F.

Conjecture :

1) Choisir trois points différents (notés M_1, M_2, M_3) et construire leurs images M'_1, M'_2 et M'_3. Tracer les droites $(M_1M'_1)$, (M_2,M'_2) et $(M_3M'_3)$. Que remarque-t-on ? Comparez avec les résultats de vos camarades.

2) Déterminer l'image A' de A et B' de B.

3) Utiliser le logiciel LEIBNIZ (avec a = 2 et b = 1) pour vérifier les résultats des questions précédentes en essayant des positions différentes. Chercher sur l'écran s'il existe un point M invariant (c'est-à-dire tel que M = M').

Démonstrations :

4) Cherchons s'il existe des point G invariants (c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$).

a) Démontrer qu'il n'en existe qu'un.

b) Démontrer que ce point G vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et aussi } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

c) Placer le point G sur le dessin. Que remarque-t-on ?

d) Démontrer que l'on a pour tout point O : $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

5) Démontrer que l'on a, pour tout point M : $\overrightarrow{MM'} = 3\,\overrightarrow{MG}$. En déduire la nature de l'application F ; puis la démonstration des conjectures faites aux questions 1 et 2.

Complément :

6) On suppose que AB = 6 . Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 4$$

B - Avec le logiciel LEIBNIZ, observer et conjecturer ce qui se passe dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\,\overrightarrow{MB}$

3) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

4) $\overrightarrow{MM'} = 1{,}6\,\overrightarrow{MA} + 0{,}8\,\overrightarrow{MB}$

5) $\overrightarrow{MM'} = -2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

6) $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} - 1{,}5\,\overrightarrow{MB}$

7) $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$

8) et tous les cas qui vous intéressent

C - Utiliser le logiciel LEIBNIZ dans le cas a = 1 , b = -1 (c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$). Que se passe-t-il ?

Démonstration : Démontrer que l'on a pour tout point M : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA}$
En déduire la nature de l'application F dans ce cas et les démonstrations des conjectures faites. Faire de même avec les cas (a = 2 ; b = -2) puis (a = -0,5 ; b = 0,5).