Bulletin de l'APMEP n°371 - Décembre 1989

la classe de math au jour le jour

de "la présentation de l'exponentielle" à "la salle de mathématiques équipée d'un ordinateur"

Hervé Depecker
Lycée Français de Madrid

Suite aux articles des Bulletins N° 333 et 361, il me paraît effectivement intéressant de présenter le plus tôt possible les fonctions ℓn et exp en Terminale scientifique.

La présentation suivante de l'exponentielle, que j'ai expérimentée cette année en Terminale C, s'appuie sur des notions que les élèves de Première S sont supposés connaître : les polynômes et les suites numériques.

J'ai donc traité les compléments sur les suites numériques avant de commencer cet exposé, sous forme de travaux pratiques, vers la fin septembre.

Un ordinateur dans la salle, éventuellement connecté par une interface à un rétroprojecteur, devrait permettre de clarifier et d'animer ce genre d'exposé parfois un peu "indigeste" dans ses démonstrations.

Etude de la suite $\left[(1+\frac{x}{n})^n\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$ notée simplement (u_n)

a) *Pour x fixé,* observation de la suite (u_n). C'est l'occasion de faire un petit programme en basic du type "boucle infinie" que l'on interrompt lorsque la convergence devient évidente. Cas de $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

b) *Pour n fixé,* étude de la fonction polynôme $P_n : x \to (1+\frac{x}{n})^n$.

C'est l'occasion d'utiliser un logiciel de tracé de courbe : en traçant les courbes représentatives de P_1 à P_{10}, la courbe exponentielle apparaît clairement.

c) *Variations de* (u_n)

On montre que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang $(n > -x)$ par l'étude des variations, pour n fixé, de la fonction q_n définie sur

$$]-n, +\infty[\quad \text{par} \quad q_n(x) = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

d) Pour $x=0$, (u_n) constante converge vers 1.

Pour $x<0$, (u_n) croissante et majorée par 1 converge. Soit $\ell(x)$ sa limite.

e) *Lemme*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout x de $[-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Ce lemme se démontre, par exemple, par l'étude, pour n fixé, des variations de la fonction : $x \to (1+x)^n - 1 - nx$.

f) Pour $x>0$, on montre que (u_n) converge en écrivant :

$$u_n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

et en utilisant le lemme et d).

g) *Synthèse*

On obtient une fonction notée λ, définie sur R par

$$\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n$$

et vérifiant $\lambda(0)=1$ et $\lambda(x).\lambda(-x)=1$ pour tout réel x.

h) *Propriété algébrique de* λ

On montre que $\lambda(x+y)=\lambda(x).\lambda(y)$ pour $x>0$ et $y<0$ en montrant que la suite

$$\left(\frac{(1+\frac{x}{n})^n \,(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{(x+y)}{n})^n} \right)$$

définie à partir d'un certain rang $(n>-y)$ converge vers 1 (on utilise le lemme et g)).

Pour $x>0$ et $y>0$, on passe par z arbitraire tel que $z<-x-y<0$ et on écrit $\lambda(x).\lambda(y)=\lambda(x).\lambda(z).\lambda(y).\lambda(-z)$.

Pour $x<0$ et $y<0$, on passe aux inverses.

i) *Autre notation de* λ

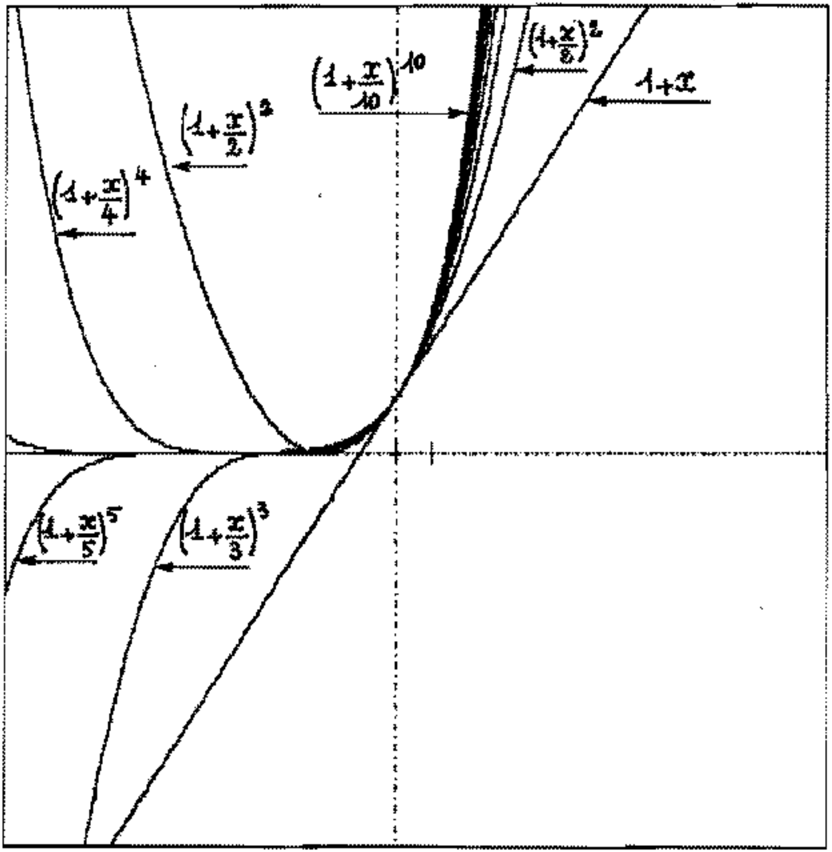
Si on note $e=\lambda(1)$, alors pour tout entier relatif n, $\lambda(n)=e^n$; on étend cette notation à R.

Ici le raccourci peut paraître audacieux et on peut discuter de l'opportunité de traiter avant la racine nième. On vérifie alors la compatibilité de la notation $(\lambda(\frac{1}{p}) = \sqrt[p]{e})$.

j) *Dérivabilité en* 0

$(1+\frac{x}{n})^n-1-x$ étant positif à partir d'un certain rang d'après le lemme, on en déduit que $e^x-1-x\geqslant 0$. La dérivabilité ailleurs s'en déduit par $e^{x_0+h}=e^{x_0}\,e^h$.

k) On montre enfin que $x\to e^x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+$ et l'étude de ℓn se déduit de celle de $x\to e^x$.


$\left(1+\frac{x}{10}\right)^{10}$
$\left(1+\frac{x}{8}\right)^{8}$
$1+x$
$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{2}$
$\left(1+\frac{x}{4}\right)^{4}$
$\left(1+\frac{x}{5}\right)^{5}$
$\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3}$