

dans nos classes

géométrie une approche par le dessin géométrique cm2 - sixième

*Yves Ducel, Marie-Lise Peltier
Professeurs de Mathématiques à l'École Normale de
Rouen*

Dans le cadre de la liaison CM2 - Sixième, il nous a semblé intéressant de proposer une progression en géométrie plane s'appuyant sur le dessin géométrique. L'expérience a été menée parallèlement dans une classe de CM2 et trois classes de Sixième de Maromme par le groupe élémentaire de l'IREM de Rouen (1).

Il nous a semblé important de centrer notre travail sur les trois points suivants :

- A. Développer des aptitudes d'analyse, de recherche, de validation chez les enfants et pour ce faire, mettre les enfants dans des situations telles qu'ils soient actifs face aux problèmes de géométrie, c'est-à-dire qu'ils aient à :
- analyser des figures,
 - émettre des hypothèses, les tester, les vérifier,
 - communiquer de telle sorte qu'ils se construisent un langage géométrique efficace et fonctionnel.

(1) Yves DUCÉL, Marie-Lise PELTIER - professeurs en École Normale -, Martine AMEYÉ, Christine BOULOCHER, Didier FOURNIER, Annie SOUILLAC - professeurs en Collège.

B. Acquérir des savoir-faire :

- savoir utiliser correctement et à bon escient les instruments de dessins géométriques (règle, compas, équerre),
- savoir construire un certain nombre de figures classiques (mentionnées dans le programme : carré, rectangle, losange, parallélogramme, triangle, cercle, ...),
- acquérir une habileté manuelle et une certaine rigueur (nécessités par le désir de faire un dessin agréable à l'œil ou s'intégrant harmonieusement dans une réalisation collective).

C. Acquérir quelques savoirs dans deux domaines :

- le langage : terminologie spécifique à la géométrie,
- les contenus : quelques propriétés géométriques de certaines figures (polygones, cercles).

Les séances menées dans les classes sont de plusieurs types.

A. Situations d'action

Exemple : Situations dans lesquelles l'élève doit observer et reproduire individuellement un modèle de dessin géométrique à même échelle ou à échelle différente. Il s'agit ici d'analyser une figure pour aboutir à la création d'un savoir-faire.

Dans ce type de situations l'enfant n'est pas toujours capable d'explicitier et/ou de justifier ses actions mais il peut cependant remplir la tâche qui lui est assignée.

B. Situations de formulation et de validation

Exemples :

— Situations de communication "émetteur-récepteur" avec élaboration d'un message écrit afin de faire reproduire un dessin.

Ces séances nécessitent un échange d'informations et permettent donc la mise en place d'un vocabulaire spécifique à la géométrie.

— Situations d'observations et d'analyse collective d'un dessin, suivies de phases de recherches individuelles et de synthèses menant à l'institutionnalisation d'un certain nombre de concepts ou de notions.

Nous avons tenté d'analyser le type de preuves proposées par les enfants, preuves pragmatiques plus qu'intellectuelles dans lesquelles les constats d'ordre perceptif se mêlent à l'argumentation.

C. Situations d'évaluation

Exemples :

- Dictée de dessin pour tester l'aptitude des enfants à comprendre le langage géométrique et à le décoder en terme d'actions.
- Questionnaire individuel comportant plusieurs exercices pour évaluer:
 - l'aptitude des enfants à décoder un texte géométrique écrit et à utiliser le vocabulaire géométrique,
 - les connaissances institutionnalisées,
 - l'aptitude à analyser un dessin et à écrire un texte court permettant à un autre enfant de refaire le dessin.

Nous présentons ci-après le compte rendu d'un ensemble de séances consacrées à l'observation, l'analyse collective et la reproduction individuelle d'un dessin proposé à l'ensemble des élèves. Ce compte rendu est extrait de la brochure "Géométrie, une approche par le dessin géométrique", chapitre III "La Fleur", publiée par l'IREM (2) de Rouen (DUCÉL, PELTIER 1987, ISBN 2-86239-003-8) qui relate l'ensemble de l'expérience.

LA FLEUR

*Séance d'observation et d'analyse collective d'un dessin
en vue d'une reproduction individuelle*

I. Choix de la situation

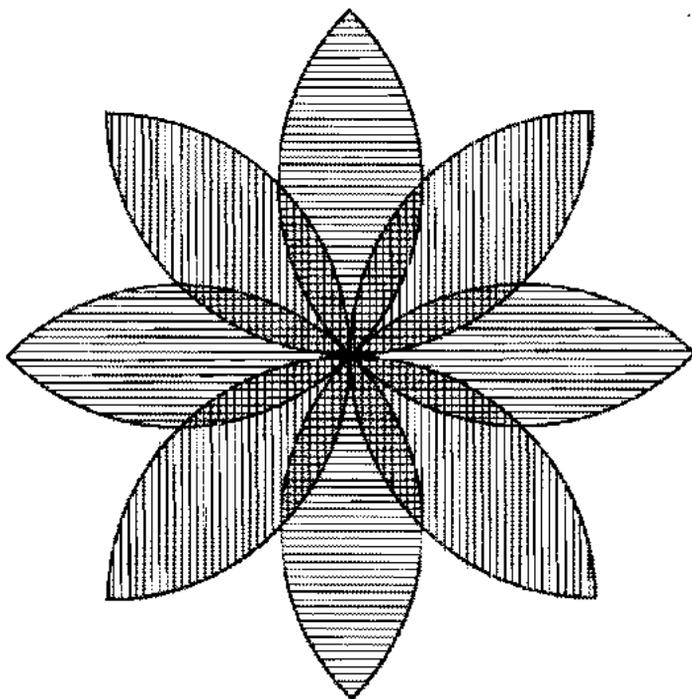
Les contenus mathématiques visés dans cette situation sont :

- le cercle,
- la division d'un cercle en huit arcs isométriques,
- les symétries axiales et les rotations.

La démarche choisie consiste en une observation et une analyse collective d'un grand dessin affiché au tableau et reproduit ci-dessous.

(2) IREM de Rouen, 1 rue Thomas Becket, 76130 MONT SAINT-AIGNAN - Tél. 35.14.61.41

La confrontation des observations a pour but d'inciter les enfants à construire un langage commun spécifique à la géométrie.



La complexité du dessin exige plusieurs phases de recherche et va provoquer une déstabilisation des conceptions des élèves. Les hypothèses émises vont devoir être prouvées ou invalidées, la variété des procédures possibles engendre une argumentation fructueuse.

Variables didactiques

• Le nombre de "pétales" de la fleur (8 grands, 8 petits) provoque une déstabilisation des savoir-faire chez les élèves lesquels activent spontanément un schème d'assimilation et se heurtent à une contradiction (obtention d'une rosace à 6 branches). Les recherches et les débats pour dépasser cette contradiction vont permettre une rééquilibration des conceptions des élèves. Ce jeu de déséquilibre-rééquilibration devrait contribuer à la construction et à l'appropriation d'un nouveau savoir-faire.

- Le choix et la disposition des couleurs sont également des variables didactiques. Le choix que nous avons fait met en évidence l'existence de carrés sous-jacents à la construction, il est motivé par le fait que nous pensons qu'il permettra aux enfants un réinvestissement des savoirs acquis antérieurement concernant le carré, mais ce choix ne bloque pas les procédures utilisant la symétrie pour la construction.

- Il nous est possible de donner soit un modèle à chaque enfant, soit un seul grand dessin affiché devant tous.

Dans le cas d'un seul dessin présenté à tous, la situation implique un échange de remarques par les élèves qui seront de plusieurs types : déclarations ou hypothèses. L'aspect collectif du débat incite les enfants à tenter une argumentation de leurs hypothèses non plus simplement en termes d'actions mais verbalement en anticipant l'action.

Un troisième choix consiste à démarrer collectivement l'activité, puis à introduire au moment de déséquilibre, un modèle à chaque enfant, afin de lui permettre une recherche par tâtonnement expérimental s'appuyant éventuellement sur des pliages, des découpages, des mesures puis une auto-évaluation de son travail.

C'est cette troisième voie que nous avons suivie.

- Il est nécessaire d'étudier aussi l'incidence du choix du papier (blanc ou quadrillé) sur lequel on fera le dessin. Le papier quadrillé peut faciliter la tâche lors de la phase de recherche, mais ensuite les enfants se trouveront dans une nouvelle situation de déstabilisation lors de la réalisation finale sur papier blanc, car les méthodes utilisées sur papier quadrillé ne sont pas toutes transférables au papier blanc.

Analyse de la tâche

Pour reproduire correctement le dessin affiché au tableau, une observation méthodique et une analyse sont nécessaires : elles concernent le nombre de branches, la régularité de la figure (existence d'axes de symétrie et d'un centre de symétrie).

La construction pourra être effectuée à partir de deux carrés concentriques déduits l'un de l'autre par une rotation d' $1/8$ de tour, elle peut être effectuée de bien d'autres façons, mais au moment où nous introduisons cette situation, les enfants ne connaissent ni les bissectrices des secteurs angulaires ni a fortiori leur construction et n'ont pas retravaillé la symétrie axiale cette année, il est donc nécessaire qu'il existe au moins une construction réinvestissant les propriétés que nous avons exhibées au cours des séances précédentes, mais il est souhaitable également que les enfants puissent en proposer d'autres [par exemple le pliage].

La phase de travail collectif doit permettre d'avancer, d'émettre des hypothèses, des déclarations, d'essayer de les argumenter, ou de les prouver verbalement sans avoir recours à l'action, en anticipant l'action.

Ce travail collectif s'appuie sur l'hypothèse que l'appropriation collective de certaines connaissances peut précéder l'appropriation individuelle et a pour but de permettre aux enfants de franchir une étape difficile dans la résolution du problème sans pour autant qu'il y ait intervention directe du maître.

Comme nous l'avons dit précédemment, le choix et la disposition des couleurs permettent de mieux identifier les deux carrés sous-jacents au dessin et induisent une certaine procédure de résolution, cependant nous verrons que nous avons sous-estimé la difficulté de la tâche. Il sera nécessaire, pour ne pas intervenir directement, d'introduire de nouveaux dessins pour avancer dans l'analyse. En effet, la détermination précise du centre de chacun des demi-cercles est un problème complexe que la découverte des deux carrés concentriques déduits par rotation d'un quart de tour permet de résoudre assez facilement.

Les enfants ont à réinvestir leurs savoirs antérieurs concernant le carré dans une situation très différente de la situation d'apprentissage, situation induisant un certain nombre de déstabilisations qui pourront être dépassées par des discussions entre enfants.

Une fois l'analyse menée à son terme, il reste encore une tâche d'une très grande complexité : comment construire deux carrés concentriques se déduisant l'un de l'autre par une rotation d'un huitième de tour.

Ici nous pensons que l'utilisation de papier quadrillé peut faciliter momentanément la recherche et permet de s'assurer que ce problème a effectivement une solution ; mais, comme nous l'avons signalé, les méthodes utilisées sur papier quadrillé [tracés des médianes en suivant les lignes du quadrillage, comptage de carreaux] ne peuvent pas être utilisées directement sur papier blanc et les enfants se trouveront à nouveau en situation de déséquilibre quant à leur savoir-faire ; il sera nécessaire d'analyser plus finement la construction faite sur papier quadrillé pour en abstraire les propriétés et les utiliser dans la construction sur papier blanc.

II. Description et analyse des procédures utilisées par les enfants

1. Phase d'observation collective

Le dessin (de grande taille) est affiché au tableau.

Consigne :

"Vous allez observer ce dessin que vous aurez à reproduire tout à l'heure, mais tout d'abord vous direz ce que vous avez observé".

Les observations peuvent être classées en deux grandes catégories :

- celles relatives à la description globale du dessin : "le dessin est joli", "c'est une fleur", "elle a des pétales, des jaunes, des oranges, des verts"... aucun enfant ne dénombre les pétales ;
- celles relatives à un mode de construction possible : "c'est facile à réaliser", "je sais comment elle est faite (la fleur)", "j'en ai déjà dessiné des pareilles".

2. Première phase de recherche individuelle

Consigne :

"Vous allez essayer de construire cette fleur".

Pratiquement tous les enfants réalisent à l'aide du compas une rosace à 6 branches.

3. Mise en commun

Lors de la mise en commun des recherches, on rencontre des attitudes très différentes :

- certains enfants sont satisfaits : leur dessin (rosace à 6 branches) leur paraît analogue au dessin exposé ;
- d'autres, plus nombreux, se rendent compte immédiatement de la non conformité de leur production au modèle et là posent le problème : "Comment faire pour obtenir 8 pétales" ;
- un élève manifeste son opinion : "le dessin que vous avez fait, il n'est pas possible, il n'existe pas car quand moi je le fais, je ne peux obtenir que 6 pétales.

On pointe ici dans la réaction de cet enfant une grande réticence à remettre en cause ses propres savoir-faire.

Plusieurs hypothèses de construction sont formulées, sont discutées, argumentées. En raison des désaccords, les constructions proposées sont exécutées par certains enfants au tableau, de telle sorte qu'il y a à ce moment prise de conscience du fait que l'action peut valider ou invalider les hypothèses faites.

Les propositions ont toutes pour point de départ la construction de la rosace à 6 branches à laquelle ensuite on fait subir des modifications.

Les enfants proposent :

- 2 rosaces à 6 branches décalées l'une par rapport à l'autre (on obtient 12 pétales) ;
- on enlève 4 pétales à la fleur obtenue précédemment, ici les enfants ont une discussion animée pour savoir lesquels effacer. On obtient une fleur ayant 8 grands pétales, mais qui n'a plus la même régularité

que le modèle (il ne lui reste que 2 axes de symétrie). Mais ce qui permet aux enfants de rejeter cette hypothèse n'est pas l'absence de régularité, mais le nombre de petits pédales verts (12).

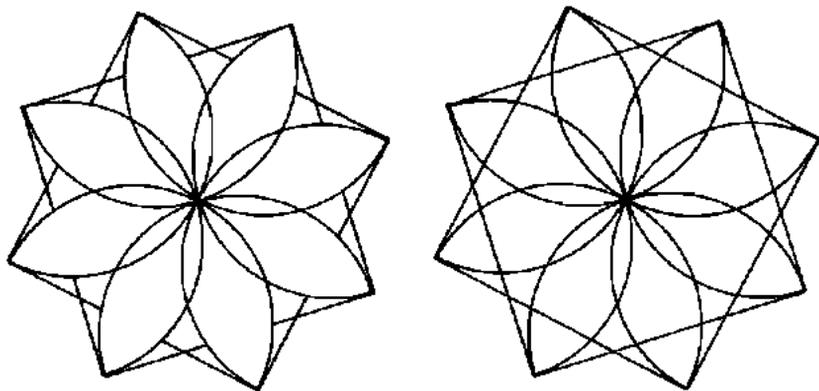
Une description détaillée du dessin est alors menée collectivement concernant le nombre de pétales, grands, petits, l'aspect régulier de leur disposition, l'isométrie des grands pétales, des petits, etc. Mais la situation reste bloquée.

4. Nouvelle phase de recherche individuelle

Nous décidons de distribuer un modèle du dessin à chaque enfant pour que les enfants puissent "agir" sur ce modèle. La distribution du dessin induit un nouveau comportement : les enfants essaient de déterminer la position du centre des demi-cercles par tâtonnement, sans essayer de faire des hypothèses sur cette position.

Nous proposons alors aux enfants les deux autres dessins (ci-après) sur lesquels les enfants retrouvent la fleur mais aussi des éléments supplémentaires.

L'introduction de ces nouveaux dessins a le mérite de laisser les enfants en situation de recherche active et de leur permettre de formuler des hypothèses pertinentes sur la position des centres des demi-cercles sans intervention de notre part, mais elle a aussi deux inconvénients : orienter les procédures de résolution plutôt dans une direction (donc fermer un peu la situation), perturber certains enfants qui ne discernent pas l'analogie entre le dessin initial et les nouveaux dessins.



5. Premier bilan

A la fin de cette séance, environ le tiers des enfants a déterminé la position des centres des demi-cercles comme étant le point d'intersection d'un côté d'un carré et d'une diagonale de l'autre, après avoir dessiné sur le modèle les deux carrés concentriques visibles sur les deux dessins proposés précédemment.

Au cours du bilan, ces enfants expliquent leurs découvertes et collectivement proposent un procédé possible de construction de la figure consistant en la construction de deux carrés de même dimension, de même centre, décalés d'un huitième de tour.

6. Phase de recherche individuelle (2^e séance)

Consigne :

"Comment construire deux carrés vérifiant les conditions citées plus haut ?".

Ici nous proposons l'utilisation de papier quadrillé en raison de la complexité de la tâche, comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe I.

Les enfants dessinent le premier carré en utilisant les carreaux du quadrillage.

Pour le second carré, ils construisent :

- soit un carré concentrique, décalé d'un huitième de tour mais non isométrique au premier ;
- soit un losange dont les diagonales sont portées par les médianes du premier carré ;
- soit un quadrilatère quelconque ;
- soit une figure qui n'est pas un polygone (genre astroïde) ;
- soit un carré de même dimension mais qui n'est ni concentrique, ni décalé d'un huitième de tour.

On constate à ce moment que les enfants deviennent très autonomes pour conserver ou rejeter leurs essais (ils ne nous appellent plus en disant "est-ce que c'est bon ?", mais ils disent "j'ai essayé de faire ceci, mais cela ne va pas, je n'obtiens pas un carré").

Cinq élèves parviennent à une construction satisfaisante en utilisant une des deux méthodes suivantes (très proches mais qui leur paraissent différentes) :

- construction du cercle circonscrit au premier carré et prolongement des médianes de ce carré, pour obtenir, par intersection avec le cercle, les sommets du second carré ;
- prolongement des médianes du premier carré et report au compas à partir du centre du carré de longueurs égales à la demi-diagonale du premier carré.

Ces méthodes de construction sont proposées par leurs auteurs à toute la classe et réalisées par tous les enfants. On a fait l'hypothèse que l'utilisation du papier quadrillé faciliterait la construction, hypothèse que nous vérifions dès que les enfants essaient de réaliser la construction sur papier blanc ; en particulier, la construction des médianes du premier carré dessiné n'avait posé aucun problème sur papier quadrillé mais nécessite un retour collectif à la définition d'une "médiante" qui avait été dégagée lors des séances antérieures.

Enfin, lorsque les deux carrés sont construits sur la feuille blanche, on constate qu'un certain nombre d'enfants ne se sont pas appropriés les conclusions de la phase d'analyse de la figure concernant la position des centres des demi-cercles permettant la construction des pétales. Ce nombre est inférieur à celui des enfants n'ayant pas trouvé par eux-mêmes la position de ces centres, mais il reste cependant non négligeable : il s'agit peut-être d'un oubli seulement lié au fait qu'il s'est écoulé quelques jours depuis ces observations et les enfants auraient peut-être réussi à retrouver tous seuls, sans nouvelle intervention de notre part, la position des centres qui avait été décrite collectivement, ou bien alors pour ces enfants le travail a-t-il été trop rapide, les discussions collectives n'ont pas été intégrées et leurs conclusions n'ont pas été appropriées.

7. Phase finale

Il s'agit à ce moment, lorsque tous les enfants ont terminé leur dessin, de gommer les lignes de construction qui sont invisibles dans le modèle et puis de colorier le dessin.

Dès que leur dessin est achevé, beaucoup d'enfants en effectuent de nouveaux utilisant la même construction mais avec des variantes ; d'autres en font chez eux et nous les rapportent la séance suivante, tout ceci sans aucune consigne de notre part, ce qui finalement constitue une phase de familiarisation "spontanée" avec les nouveaux savoir-faire et un réinvestissement de ces savoir-faire dans des situations voisines de celle qui les a provoqués.

8. Phase d'institutionnalisation

Elle concerne :

- le vocabulaire concernant le cercle,
- les propriétés des diagonales et des médianes du carré,
- plusieurs procédés de construction du carré utilisant le compas, suivant que l'on connaît la longueur du côté ou celle d'une diagonale.

9. Conclusion

Malgré la complexité de la tâche et les difficultés rencontrées à gérer les recherches des enfants, ce travail, nous semble-t-il, a été très fructueux.

Il a en particulier rendu les enfants très autonomes au niveau de l'évaluation de leur production. En ceci, il a modifié d'une façon qui nous semble significative, la relation entre les élèves et nous. Les élèves ne sont plus en position d'attente vis-à-vis de nous : les phrases "comment fait-on ?" ou "est-ce que j'ai bon ?" semblent être sorties de leur vocabulaire.

Cette situation a permis également de mettre l'accent sur le fait qu'il est parfois nécessaire de construire des éléments qui ne sont pas apparents sur le dessin final ; percevoir le caractère d'outil provisoire de ces éléments semble très important et nous avons vu que certains enfants mettaient en œuvre, ultérieurement, des procédures s'appuyant sur cette découverte.

Enfin, l'enthousiasme des enfants à réaliser ce dessin et des dessins analogues nous paraît être un élément intéressant à mentionner.