didactique

comportements insolites à l'égard de l'infini

Ahmed Yahiatene
Classes préparatoires, Lycée St-Pierre, Lille

"L'enseignement n'est pas une espèce d'un genre appelé domination, une hégémonie se jouant au sein d'une totalité, mais la présence de l'infini faisant sauter le cercle clos de la totalité."

Emmanuel LEVINAS
(Totalité et Infini)

Christiane Hauchart, après avoir soutenu une thèse intitulée : "Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite" en 1985 à Louvain-la-Neuve, vient de publier avec Nicolas ROUCHE "Apprivoiser l'infini : ou les débuts de l'enseignement de l'analyse" (1). L'ouvrage est très largement inspiré de la thèse.

Dans ce travail, il y a un double enjeu :

- d'une part, rendre compte de la façon dont les élèves s'approprient les concepts de suite et de limite de suite ;
- d'autre part, observer le plus finement possible les modes de raisonnement mis en jeu par chaque élève au cours de cette appropriation ;

l'outil : un lot de 25 problèmes écrits sans réelle formulation mathématique ;

(1) CIACO Editeur, Louvain-la-Neuve. On peut se le procurer en écrivant à l'auteur : GEM, Chemin du Cyclotron, Louvain-la-Neuve.

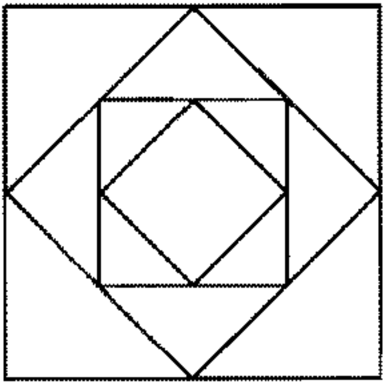
le public : pour la plupart, des élèves du secondaire vierges de toute culture concernant les concepts de suite et de série.

Les problèmes ont tous un point commun : ils mettent en jeu des processus infinis dans des contextes très diversifiés :

— géométrie (construction de figures emboîtées),
— nombres (développements décimaux, suites, ...),
— physique (processus dynamiques...).

Voici le texte de l'un de ces problèmes dont le titre est : "Un zoom de carrés".

"Dans un grand carré, on construit un autre carré en joignant les milieux des côtés, ce qui fait apparaître quatre triangles-rectangles. On enlève ces quatre triangles du premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré, ce qui en fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite. Que se passe-t-il ?"



La question est trop vague, cependant c'est aussi là, la force de la démarche car le problème est ouvert. Les élèves vont pouvoir libérer leur imagination, et il sera dès lors possible de recueillir les diverses réactions suscitées par le problème. C'est l'analyse de ces réactions qui est le point crucial, car on assiste alors à la "naissance de la pensée raisonnante".

Dans un premier temps, les élèves opposent une limitation physique à la construction proposée, en effet, après peu d'étapes, "le carré à dessiner sera noyé dans le trait de crayon".

Vient alors une autre approche : ils comprennent que l'on peut imaginer de poursuivre le dessin (ce qui est suggéré par les emboîtements parfaitement réguliers des divers carrés). C'est la naissance d'un objet mental, imaginaire, en quelque sorte pré-mathématique.

Christiane Hauchart nous fait remarquer alors que : *"Cette immense kyrielle est encore loin d'être saisie comme une application de* $\mathbb{N}$ *dans un ensemble de carrés. La notion de suite est en train de naître sans plus".*

Les élèves perçoivent des figures mais ces figures ne sont rattachées à aucune idée de nombre ou de surface. Ils ont cependant compris que le carré restant devient de plus en plus petit. L'idée que la suite des aires tend vers 0 n'est perçue que de façon intuitive. On arrive ainsi à l'expression de l'aire des carrés.

Si le carré initial a pour aire 1, à partir du second l'aire de chaque carré vaut la moitié de l'aire du précédent. En effet, à chaque étape, les quatre triangles repliés recouvrent le carré qui reste.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$$

Les points de suspension indiquent que l'on continue. Une première découverte inspirée par le dessin est que ces nombres deviennent de plus en plus petits (la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0).

Mais bientôt les élèves découvrent d'autres pistes. Ils perçoivent dans la figure un puzzle de triangles qui reconstituent le carré initial. Cette nouvelle perception amène les élèves à considérer une étrange somme.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

Autre surprise, le puzzle fournit une valeur pour cette étrange somme.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 1$$

Cette valeur est tout à fait en accord avec ce qu'il est convenu d'appeler l'infini actuel. On retrouve cette notion dans l'expression : "La somme de la série vaut 1".

Cependant, les élèves ont conscience qu'il est impossible de construire la somme jusqu'au bout. La somme s'approche de 1 mais n'est jamais égale à 1. On retrouve bien évidemment cela dans la notion d'infini potentiel et dans l'expression "la série tend vers 1".

Arrêtons-nous un instant. Il est bien évident que les élèves n'ont pas présent à l'esprit les subtiles distinctions entre infini actuel et infini potentiel. On peut cependant admettre que leurs hésitations (entre l'envie que cette somme soit égale à 1 et la réalité qui s'impose, à savoir que la somme approche de plus en plus 1 — réalité imposée par la figure bien sûr —) constituent pour eux un terrain de modélisation tout à fait favorable. A travers tous les problèmes proposés, cette démarche est présente. Il s'agit de construire pas à pas le terrain favorable pour une modélisation mathématique à venir.

La démarche de Christiane Hauchart et de Nicolas Rouche est tout à fait remarquable car ils ont su à la fois :

— mobiliser les élèves par une démarche quasi ludique
— mettre en place les premiers jalons d'une théorie (même si elle n'est ressentie que de façon intuitive par les élèves)
— observer la naissance de cette "pensée raisonnante"
— montrer que cette "pensée raisonnante" se construit sur d'apparentes contradictions chez l'élève
— enfin, et ce n'est pas rien, démystifier l'activité mathématique en lui redonnant une composante esthétique et "poétique".

Christiane Hauchart écrit :

"Découvrir ainsi les choses par eux-mêmes implique les élèves plus complètement dans l'acte de connaissance que de les recevoir d'un autre. Ils en sont davantage marqués et les manient mieux après. En outre, ils vivent la joie de leurs propres mouvements mentaux, de leur illumination subite".

Il apparaît essentiel donc de mettre les théories mathématiques à leur juste place, c'est-à-dire à la fin d'une démarche d'apprentissage quand il y a du matériau à mettre en théorie.

Il se développera alors chez les élèves l'envie de rentrer dans le monde des mathématiques car il y aura eu cette joie et cette illumination.

Pour Christiane Hauchart et Nicolas Rouche : *"Apprendre les mathématiques à tous les niveaux, c'est construire un savoir sur des chantiers de problèmes".*

Sur ces chantiers de problèmes, les élèves ressentent des émotions : joie de la découverte, illumination subite. Nous devons en tant qu'enseignants favoriser et communiquer cette émotion, la recevoir de nos élèves le cas échéant. L'acte d'enseignement est composé de trois "personnages" : le professeur, la matière, l'élève. Entre chacun d'eux, il doit y avoir des échanges d'informations mais aussi d'émotions. Bertold Brecht a écrit un très beau texte que les auteurs citent dans leur ouvrage. Je ne peux résister au plaisir de le reprendre.

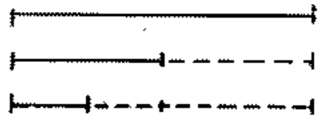
"Les arts de la scène ont à affronter la tâche d'élaborer une forme nouvelle de transmission de l'œuvre d'art au spectateur. Ils doivent renoncer à leur monopole de guides des spectateurs, monopole exercé sans tolérer de contestation ni de critique et chercher à donner des représentations de la vie sociale des hommes, qui permettent et même imposent au spectateur d'adopter, aussi bien à l'égard des processus représentés que la représentation elle-même, une attitude critique voire de contradiction. Les processus doivent être transmis d'abord au spectateur dans ce qu'ils ont d'insolite et de surprenant...".

Cet aspect insolite est rarement exploité en mathématique ou tout au moins dans leur enseignement aujourd'hui. Si l'on en croit certains élèves, il s'agirait plutôt d'un enseignement soporifique.

Invitée il y a quatre ans (déjà !) pour une conférence à la Fédération Universitaire et Polytechnique de Lille, Christiane Hauchart sut admirablement illustrer les propos de Bertold Brecht. Elle donna deux démonstrations très différentes du fait que :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots = 1$$

La première démonstration fut la suivante :



Considérons un segment de longueur 1

Otons-en la moitié

Puis la moitié de ce qui reste

Agissons de la même façon sans interruption...
Les longueurs successivement retranchées sont :

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots$$

Et dans toute assemblée (surtout de non-mathématiciens !), il n'est pas difficile de faire comprendre et susciter un large consensus sur le fait que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1$, puisque la somme des longueurs retranchées reconstitue le segment.

La seconde démonstration débuta après que Christiane Hauchart ait demandé qu'on l'excuse d'infliger à une partie du public présent et non mathématicien ce qui allait suivre.

Définition 1 :

On appelle suite réelle toute application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$

Définition 2 :

On appelle série numérique la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

On dit que S_n est une somme partielle.

Définition 3 :

Soit $S \in \mathbf{R}$. On dit que (S_n) converge vers S si et seulement si :

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |S_n - S| < \epsilon)$$

Applications :

On considère $f(k) = \frac{1}{2^k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Lemme 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

La démonstration se fait par récurrence par exemple !

Lemme 2

La suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0.

En effet, $\forall \epsilon > 0$ si l'on veut $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right|$, il suffit de choisir n_0 tel que

$\left[n \geqslant n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2^n} < \epsilon \right) \right]$ donc $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$ et $2^{n_0} > \frac{1}{\epsilon}$.

Comme $x \rightarrow \text{Log } x$ est croissante (par exemple)

$$n_0 \text{ Log } 2 > \text{Log} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \quad \text{donc} \quad n_0 > \frac{\text{Log } \frac{1}{\epsilon}}{\text{Log } 2}$$

Dans ces conditions, l'entier $n_0 = E\left(\frac{\text{Log} \frac{1}{\epsilon}}{\text{Log } 2} \right) + 1$ convient.

Théorème :

La suite des sommes partielles (S_n) converge vers 1.

En effet, c'est une conséquence du Lemme 2.

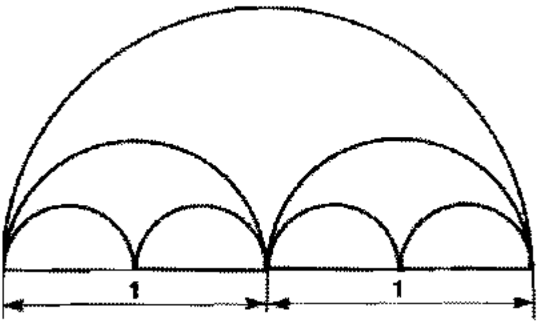
La réaction de la salle surprise, fut d'abord un rire, un rire de soulagement certainement !

Et lorsque Christiane Hauchart fit remarquer que les notions de suite et de séries n'ont certainement pas été inventées pour traiter de ce genre d'exemples, tout le monde sembla d'accord. On aura cependant présent à l'esprit la réalité quasi quotidienne de cours de mathématiques infligés à nos élèves dans l'esprit de cette seconde démonstration !

Christiane Hauchart a réussi son coup, la mise en contradiction des deux démarches pose avec acuité la question de ce qu'est une démonstration.

Si la compréhension intuitive du phénomène n'est pas en soi une démontration, sa formalisation ne l'est pas plus aux yeux d'une personne non initiée. De ce point de vue, la seconde démonstration a réellement quelques rapports avec un savoir initiatique ; elle ne pourra être entendue et surtout comprise que dans le cadre d'une théorie des séries, qui apporte réellement de nouvelles perspectives : la puissance de cette théorie n'est plus, malheureusement, du domaine de la compréhension élémentaire ou intuitive.

Au contraire, il semblerait utile d'avoir la construction de cette théorie sur de multiples démonstrations du type démonstration 1. Il faudra, bien sûr, faire apparaître des phénomènes contradictoires aux yeux des élèves qui sentiront alors la nécessité d'aller plus loin dans la recherche. Par exemple, on pourra considérer la figure suivante, et faire apparaître



que de façon contradictoire, la somme infinie des longueurs des arcs de cercle qui "semble" tendre vers le diamètre AB = 2, est aussi constante, car à la première étape la longueur des deux arcs de cercle est égale à la longueur du demi grand cercle, soit π.

La contradiction vient alors du fait que π n'est pas égal à 2, bien que ce soit suggéré par la figure.

On apprendra ainsi à se méfier des processus infinis et l'on saura que l'intuition ne constitue pas toujours une arme démonstrative. Quelle différence avec une attitude classique ? On peut espérer que cette envie de théorisation vienne des élèves et non de l'enseignant, car il en aura senti l'absolue nécessité, nécessité inspirée par l'émergence de ces phénomènes contradictoires.

A ce sujet, Bertold Brecht écrit :

"Pour distancier, le comédien agit exactement comme celui qui décrit une chose pour montrer comment s'en servir. Cette méthode permet tout simplement de concentrer l'attention sur ce qu'on entend décrire et le rendre intéressant. C'est ce que font et depuis longtemps les hommes de science quand ils observent et aiment à observer de tels phénomènes... Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne la comprenaient pas vraiment pour décou-

vrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux ; de la sorte, ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié. Ains, certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à vrai dire, a pour objet de les faire véritablement comprendre".

L'accumulation de processus contradictoires amènera donc les élèves progressivement vers une plus grande maturation.

Les phénomènes de divergence lente choqueront l'imagination dans un premier temps car l'intuition sera prise en défaut.

On assiste donc au développement d'un savoir instrumental qui se peaufine à mesure que les problèmes à examiner s'accumulent et contredisent l'intuition.

Nicolas Rouche et Christiane Hauchart ajoutent :

"Le doute et l'erreur ne sont pas des insuffisances des élèves qui ne seraient pas arrivés à saisir le fond des choses. Ce ne sont pas non plus des accidents tout compte fait regrettables, même si le professeur s'efforce d'en tirer le meilleur parti didactique. Ce ne sont même pas seulement des points de passage obligés de toute recherche. Bien plus fondamentalement, il n'y aurait pas de recherche s'il n'y avait pas de doute et d'erreur. La recherche n'a d'autre objectif que de les réduire et l'effort de recherche s'éteint dès qu'ils disparaissent".

Dans toute cette démarche, quel est donc le rôle du professeur ? Il est évidemment très important, car les élèves ne peuvent pas non plus reconstruire toute la théorie par eux-mêmes. Il est utile, lorsque des questions délicates se posent à eux, qu'ils aient un interlocuteur compétent qui les aide à mieux comprendre et assimiler des connaissances qu'il a fallu parfois forger pendant des siècles. Mais ils sont alors à l'écoute car les questions viennent d'eux. Ils veulent satisfaire leur curiosité.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur cet excellent ouvrage et sur les problèmes pédagogiques, épistémologiques, didactiques qui y sont posés. Je ne peux que le recommander très vivement à tous ceux que les mathématiques font vibrer, quant aux autres, ils découvriront peut-être là leur première émotion mathématique !