Bulletin de l'APMEP n°370 - Septembre 1989

tribune libre

enseigner les mathématiques aujourd'hui

François Boule
Ecole Normale d'Auteuil

Les enseignants de mathématiques vivent depuis longtemps sur la prébende de la **sélectivité** de leur discipline (même si celle-ci relève plus souvent du fantasme que de la réalité, cf. Bigart (4)) : le prof de math est une sorte d'oracle dans les conseils de classe et d'orientation, et l'objet de maintes sollicitations ; ce n'est pas une position qui invite forcément à s'interroger sur le bien-fondé de l'état de chose. Certains peuvent la trouver inconfortable, injustifiée, périlleuse, mais tous en profitent. Néanmoins le poids de cette sélection finit par paraître excessif, disproportionné, arbitraire, bref contesté.

Il l'est d'autant plus que ce critère (s'il doit y en avoir un) n'est pas le seul imaginable, et qu'on en peut connaître d'autres. Il semble que jadis des qualités plus typiquement "littéraires" (culture classique, aisance de rédaction et d'élocution) aient permis la sélection (et la reproduction) d'une élite ; après quoi une certaine confiance dans la science, et la valorisation du métier d'ingénieur, ont conduit à l'émergence d'une élite scientifique, dont le milieu d'origine ne coïncidait pas avec le précèdent ; la "reproduction" (cf. Bourdieu) s'est ainsi légèrement déplacée. On assiste maintenant à une nouvelle "conquête par les marges" par le moyen de l'informatique, science jeune, et par là-même irrespectueuse et exigente. Telle est la première donnée, qui invite à la révision.

Echec en math

Il en est une autre, très (trop) connue, lourde de sens et dont on n'a pourtant jamais tiré de conséquences réelles. Elle s'exprime de deux façons :

a. "l'image sociale négative et déformée de la discipline" (Dacunha-Castelle (2)) ; cet aspect a été partiellement analysé (population des lycées) par J. Nimier (7). Il est pour le moins paradoxal qu'il y ait un tel écart, persistant, non résolu, entre l'idée que se font les enseignants de mathématiques, et celle qui en résulte chez les élèves et leurs parents ("ça ne sert à rien" ; "je n'y ai jamais rien compris" ; "le cauchemar de mon enfance" etc.) ;

b. ce premier aspect n'est sans doute pas sans conséquence sur un second : celui de l'échec massif, continu, persistant de l'enseignement des mathématiques. Mais analyser celui-ci en terme de retentissement affectif (c'est-à-dire en termes psychologiques ou sociologiques) n'est certainement pas suffisant. Pas plus que d'en rendre responsable les enseignants ou l'institution (S. Baruk (5)). Même si les uns et l'autre ont là quelques responsabilités, par suite d'une volonté de privilégier les filières élitaires, d'une méconnaissance de la psychologie de l'élève ou d'une volonté insuffisante de s'en préoccuper, d'une carence de la formation à la fois disciplinaire et pédagogique etc. Toutes choses sur lesquelles on reviendra par la suite.

Cet échec massif est évident par plusieurs indices. D'abord le signalement d'élèves en difficulté. Ils sont assez rares au C.P. (et pas seulement parce que l'on prête plus d'attention à la lecture) ; ils sont moins rares au C.M. et surtout se multiplient au collège. Après quoi, on finit par trouver normal que l'élève **s'oriente**, moins souvent d'ailleurs en fonction de ses préférences que de ses répulsions ou des obstacles qu'il rencontre (tropisme négatif).

Compétence à terme

Mais surtout, on ne peut qu'être stupéfait et alarmé du peu de compétence qui subsiste après une douzaine d'années de fréquentation scolaire, c'est-à-dire en moyenne plus de **2 000 heures** d'enseignement de mathématiques.

Il ne s'agit pas seulement, comme pour l'"illétrisme" (dont on s'émeut périodiquement) d'une chute de performances chez des individus qui, pendant des années n'ont pas entretenu la pratique initiée à l'école. Il suffit d'examiner, pour un échantillon de bacheliers récents ou d'étudiants de toutes disciplines, quelles sont les compétences techniques ou méthodologiques qui subsistent.

On constate qu'elles sont **en moyenne** assez sensiblement inférieures à ce que le programme de CM2 permettrait d'espérer : la moindre mise en équation (du premier degré) est insurmontable, un calcul sur les fractions, un problème de pourcentages sont échoués à plus de 50 % (cf. statistiques sur le recrutement en E.N., notamment).

Conséquences

Cette faillite incontestable (on n'affirme pas ici qu'elle ne concerne **que** les mathématiques) ne peut être méconnue ou éludée plus longtemps sans conséquences importantes. On en voit déjà quelques-unes, comme celle-ci : le déficit du recrutement d'enseignants. Bien sûr, il ne suffit pas de faire publicité pour le métier ("l'avenir est aux profs") quand le pouvoir d'achat et la position sociale d'un instituteur sont très inférieurs à ce qu'ils étaient il y a 40 ans.

Il y a un moyen bien plus simple et plus économique que de recruter des profs, de les former et de revaloriser la profession : c'est de réduire l'enseignement des mathématiques. Coup double : on fait des économies, et sans craindre que les élèves ou le public n'expriment des regrets. De toutes façons les meilleurs élèves, avec leurs parents ou de bonnes lectures, parviendront toujours au niveau requis par les études supérieures. On s'étonne même, sans s'en réjouir, qu'une idée aussi simple apparaisse pour la première fois dans un gouvernement socialiste. Il est probable que le processus soit un peu moins simple. Mais il aboutirait cependant à **classer** définitivement une situation depuis longtemps désastreuse.

Du coup les mathématiques deviendraient **ustensiles**. On n'en garderait ce qui peut servir pour telle ou telle autre discipline, pour autant que les calculatrices de poche ne le fournissent pas encore. Ce serait réduire les mathématiques (et peut-être à terme d'autres disciplines) à une sorte de **technologie** : celle-ci a certainement lieu de trouver place *dans la formation des élèves, pour ce qu'elle apporte de spécifique, mais* non pas de redéfinir les autres disciplines à son image.

Recherche des causes

Pour en comprendre l'origine il convient d'interroger les difficultés rencontrées par les élèves. Un groupe important d'obstacles à la compréhension ou à la compétence peut être logé sous le titre : privation de sens (''panne de sens'' !).

Cette privation peut provenir d'un manque de rapport au réel entretenu par l'enseignant, ou involontaire de sa part. Cette première situation a connu un large développement entre 1970 et 1980, dont on n'a pas fini de payer les conséquences, lorsque l'enseignement du second degré était furieusement formaliste, soit-disant pour une exigence de rigueur ; on a fini par reconnaître que les mathématiques *faites* ressemblaient assez peu à celles qui se *faisaient*, et encore moins à celles qui pouvaient s'enseigner. Il reste cette tenace impression (chez certains enseignants au moins) que la rigueur ne tolère **à tout moment** que ce que N. Rouche (1) appelle le ''sens étroit'', ou encore que les mathématiques ne sont constituées que du seul mouvement que laisse voir leur **trace**.

Cette absence ou ce refus du sens a été maintes fois dénoncé depuis une dizaine d'années, notamment par S. Baruk, qui considère que le premier moment de la rééducation consiste à restituer un sens aux termes employés, ou à amarrer leur sens étroit dans le réseau des significations de la langue.

Mais cette absence ou cette fragilité du sens n'est pas seulement sémantique. Il s'agit aussi souvent d'une pauvreté ou une instabilité des **représentations** associées aux notions. L'activité mathématique est alors perçue comme un jeu dont les règles formelles sont relativement arbitraires donc éloignées du réel, et les objets dont elles jouent, dépourvus de valeur intuitive. On assiste alors à des ***fonctionnements de surface*** particulièrement caractéristiques parce qu'on peut les observer aussi bien à 8 ans qu'à 13 ou 18. Ainsi Giordan et De Vecchi (11), constatant que ''le savoir scientifique passe mal'' établissent que les *représentations antérieures* continuent de jouer en arrière-plan au cours de l'apprentissage, à l'insu de l'enseignant et même éventuellement de l'élève. L'un des buts de l'enseignement obligatoire (et notamment pour les non scientifiques) devrait être de tenter de corriger les représentations par trop primitives ou inopérantes ; ce qui ne nécessite pas une inflation des programmes, bien au contraire.

Dans une **représentation** fonctionne toujours en quelque façon une **analogie** soit des *objets* avec une *réalité*, soit des *énoncés* avec des *actions* sur les objets (9). C'est ici qu'il faut distinguer ce qui concerne des savoirs (''bases de faits'') et des procédures (''méthodes'', ou règles). Ainsi ''la résolution d'équation ou d'inéquation'' peut-elle appeler des régles comme ''changer de membre - changer de signe''. L'évocation de ces représentations n'appelle pas de justification ou de preuve (elles sont supposées en être une condensation) et sont les moyens exclusifs d'action sur des objets dépourvus de valeur intuitive. Il arrive donc que ces "bases de règles" soient incohérentes ou lacunaires. Ainsi il est connu que lorsqu'on demande à des élèves de C.M. de reproduire une figure, de telle sorte qu'un segment AB de 3 cm sur le modèle ait 6 cm sur la copie, mais en conservant la même forme, un "modèle multiplicatif" est activé ; mais lorsque la transformation porte AB de 3 à 4 cm, c'est souvent un modèle additif ("ajouter 1 aux mesures") qui est évoqué.

De la même façon, pour des élèves de terminale et au-delà, l'équation $|x - 8/3| = 0$ conduit à la solution $x = 8/3$, mais l'équation $|x + 3| = 0$ peut conduire à la solution $x = \pm 3$. C'est probablement un schéma d'action qui est évoqué par la situation, plutôt qu'une structure mathématique (non encore complètement constituée). Ce schéma serait alors instable lorsqu'on s'écarte d'un "noyau d'attraction" constitué par les situations les plus aisées à résoudre. Peut-être y a-t-il là une question de "surcharge cognitive", dans le cas où la question porte à la fois sur une règle à mobiliser et la complexité consécutive des calculs... Il est en tout cas important de voir que ces *comportements de surface* induits par l'usage de règles "personnelles" peuvent dissimuler durablement une méconnaissance des structures mathématiques opérantes.

De telles questions, évoquées ici à la hâte, méritent une étude approfondie parce qu'elles concernent *au fond* la signification d'un enseignement des mathématiques : la multiplication des structures de rééducation ou d'aptation pose plus de problèmes qu'elle n'en résout.

*

A quoi sert-il d'enseigner les mathématiques ?

La question est certainement loin de recueillir, même chez les enseignants de mathématiques, des réponses unanimes. Et toutes les réponses, comme le rappelle N. Rouche (1) sont menacées par le doute. On peut tenter cependant d'en repérer trois groupes :

— les premières invoquent une *utilité* : cet argument est assez convaincant pour ce qui concerne l'enseignement élémentaire, jadis seul obligatoire ; mais il s'effrite à mesure que l'on progresse dans le collège et le lycée. La plupart des notions étudiées au lycée ont-elles une utilité quelconque pour tous ceux qui ne poursuivront pas des études supérieures ? Et ne vaudrait-il pas mieux entretenir et affermir celles qui ont quelques chances d'être employées plus tard (et dont on sait qu'il ne restera, faute d'entretien qu'une évocation squelettique, inopérante ou erronée ?) ;

— une autre position, plus rarement défendue, fait état d'une *référence culturelle*. Les mathématiques participent d'un patrimoine culturel de l'humanité, comme l'astronomie, la musique, la littérature et bien d'autres disciplines. Un citoyen du XX^e siècle ne peut en ignorer tout, pas plus qu'il ne peut tout ignorer des lois de Képler, de la musique de Bach, du cubisme ou de Shakespeare. Mais alors le point de vue et par conséquent la façon d'enseigner doivent être bien différents. Reste à définir, pour l'enseignement obligatoire, en quoi peut consister cette *culture minimale* ou dans quel *répertoire* elle peut valablement puiser les contenus à fréquenter. Cette question doit être examinée *en amont* de toute revendication corporative ; il n'est d'ailleurs pas évident que les enseignants ou chercheurs de mathématiques soient seuls concernés pas elle. L'abandon rapide de ce type de réflexion est probablement l'une des causes de la faillite de l'introduction de l'informatique à l'école et au collège ;

— un troisième point de vue souvent évoqué en appelle à la "formation de l'esprit" : rigueur, raisonnement, logique. Ainsi G. Choquet (8) cite Polya : "le but principal de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre aux étudiants à penser". Une vue aussi synthétique est assurément fondée par le recul que procure une culture étendue et une longue et prestigieuse carrière. On en voit cependant à la fois la grandeur et la fragilité. D'une part rien n'assure que ce soit un monopole des mathématiques. Et d'autre part cette vertu reste à prouver. Il advient d'ailleurs qu'on la trouve maintenant à l'informatique ; et J. Weizenbaum (12) rappelle plaisamment que si c'était vrai les professeurs en Computer Science seraient plus heureux en ménage et plus riches à la Bourse, et que cela se saurait.

Mais sans doute y a-t-il une spécificité à saisir, de l'ordre de la **méthode** : les mathématiques sont un lieu où toute autorité provient du raisonnement. D'une part, le statut de la *preuve* y est différent de ce qu'il est dans d'autres disciplines scientifiques : il est peu vraisemblable qu'un élève, en physique ou en biologie, imagine seul une situation expérimentale susceptible de valider une hypothèse ; l'enseignement de la physique ou de la biologie est une sorte de raccourci historique dont l'élève ne peut être, en majeure partie, que *témoin*. Par contre, en mathématiques, les moyens de tester une conjecture, ou d'argumenter à son propos sont beaucoup plus accessibles, pour autant que quelques instruments conceptuels soient à sa disposition. L'enseignement des mathématiques pourrait ainsi être un lieu où imaginer, formuler, valider des conjectures — mais est-il souvent perçu comme un espace d'imagination et de liberté ?— . Par ailleurs, cet univers *logique* n'est "habitable" que si l'on en connait et l'on en accepte les règles et la discipline, en bloc, de la même façon qu'il n'y a jeu que si l'on accepte librement le jeu.

Cette question est, assurément, fondamentale. Faute d'être abordée de front, aujourd'hui, elle expose l'enseignement des mathématiques (comme celui de toutes les autres disciplines) à des dérives, des réductions, des dévoiements au gré des pressions sociales, politiques, économiques qui vont s'exercer sur lui.

Sans doute le problème autrefois était-il plus clair : l'école obligatoire avait pour objectif premier l'autonomie de l'individu et son insertion dans une communauté. La poursuite des études définissait une élite. L'allongement des études obligatoires, et un accroissement d'exigences professionnelles a développé le versant **propédeutique** de l'enseignement secondaire. La réforme des "mathématiques modernes", très bien analysée par B. Charlot [10] a manifesté l'ambiguïté et la faillite de cette évolution : conçue comme une *démocratisation* des mathématiques, elle a été réalisée de façon exactement inverse. La question qui est sans cesse renvoyée à tout enseignant de mathématique (*indépendamment* des programmes qui n'en sont qu'une manifestation superficielle obligée) est celle-ci : quelle compétence (opératoire) vise-t-on en fin de cursus ?

De cette question cardinale découle une orientation des programmes et une politique de formation ; la politique du *recrutement* dépend, on le sait, d'autres impératifs. La formation (initiale ou continue) jusqu'ici, lorsqu'il est arrivé qu'elle existe, s'est plutôt préoccupée de contenus de connaissances que de réflexion pédagogique, du moins en dehors des IREM et pour ce qui concerne l'enseignement du second degré. On ne peut attendre d'une formation que les enseignants en sortent tout armés pour leur carrière entière ; mais à l'inverse c'est une grave illusion (dont on constate à l'évidence les méfaits) que de croire qu'un recrutement technique peut tenir lieu de formation pédagogique lorsqu'il s'agit d'enseigner au lycée ou au collège.

Quelles mathématiques enseigner ?

En ce qui concerne l'école élémentaire, la question semble réglée : M. Dacunha-Castelle [2] la considère "hors du spectre de travail" actuel, et un ministre récent, que la clarté de son langage a depuis désigné pour diriger les armées, a rappelé fermement, après J. Ferry, qu'il s'agit à l'école de LIRE, ECRIRE, COMPTER. Il faudrait en conclure que peu de choses ont changé depuis un siècle. Ce n'est pas si sûr, notamment pour la raison que l'enseignement obligatoire ne s'achève plus à 12 ans. Cet enseignement s'inscrit dans un durée plus longue, et se passe dans un environnement culturel beaucoup plus "concurentiel" qu'autrefois.

Il doit sembler tout d'abord hors de propos, et même scandaleux de laisser aux élèves eux-mêmes le soin de trancher la question. Ou bien alors, si l'éducation doit se décider au hit parade, il faut renoncer tout de suite à une école de la démocratie : les "bons élèves" demanderont des cours, des problèmes et des contrôles (afin de succéder un jour à leurs parents dans l'annuaire des grandes écoles), et les autres préfèreront le casque de leur walkman au cours de math. Autoriser une dispense pour le seul motif que "l'on n'aime pas ça" ouvre la porte au laxisme et à la démagogie.

Modulation

Encore faut-il que les activités et le programme envisagés aient une signification adaptée aux intérêts et aux capacités des élèves. Or il peut sembler que les programmes de l'enseignement secondaire soient conçus du point de vue de l'exigence de la *discipline*, et non comme un programme *d'enseignement*, c'est-à-dire référés aux élèves qui devront le suivre. Les programmes des séries scientifiques sont conçus non pas en fonction d'une **fin** de l'enseignement obligatoire, mais d'une **propédeutique** aux études supérieures (et particulièrement des classes préparatoires, qui sont l'objet de l'attention prioritaire de l'Inspection Générale) ; ils ont ainsi connu en trente ans une inflation considérable. Les séries non scientifiques disposent d'un horaire moindre. Leurs programmes actuels, du moins dans leurs *objectifs* et leurs *commentaires*, définissent beaucoup mieux que jadis un point de vue propre, réduisant la place de *l'instrumental* (puisque vouée à un oubli rapide), au profit de la compréhension de quelques concepts-clés, de leur histoire, de leur situation par rapport à d'autres champs de connaissance. Ainsi pourrait-on éviter un formidable gaspillage de temps, d'énergie, et de motivation ; si toutefois il n'est pas trop tard, les opinions et attitudes sur les mathématiques étant souvent établies avant la classe de Première. Encore faudrait-il aussi que les enseignants eux-mêmes et les jurys adoptent des points de vue qui ne sont pas ceux qui ont guidé leurs propres études et qui réclament d'eux une préparation et une réflexion approfondie.

Il est clair que la question ne se résout pas dérisoirement par le souhait d'un horaire majoré en mathématiques : "toujours plus de la même chose" ne résout aucun problème qualitatif (cf. 13).

Il se trouve aussi qu'il n'a pas été question jusqu'ici de didactique des mathématiques ; cette omission n'est pas un oubli. Un haut responsable du Ministère de l'Education Nationale affirmait récemment "strictement inutilisable" les produits actuels de la recherche (14). Il est sans doute urgent que la didactique cesse de n'être qu'un signe de reconnaissance, et se préoccupe de donner sinon des réponses, du moins une aide aux enseignants non didacticiens.

Peut-être la "réflexion globale engagée sur les mathématiques" est-elle une ultime occasion à saisir pour engager les débats évoqués ci-dessus ; à relire le *Bulletin*, sans nostalgie, on s'aperçoit qu'ils ne datent pas d'aujourd'hui (15).

(Novembre 1988)

---

(1) N. Rouche : *Pourquoi les maths ?* (conférence Loctudy), *Bulletin* A.P.M.E.P. 362.

(2) Mission Dacunha-Castelle (échange de lettres), BGV n° 23, septembre 88.

(3) Houdebine et Julo : *Les élèves en difficulté dans le premier cycle*, R.F.P. n° 84, 3e trimestre 88.

(4) A. Bigard : *Mathématiques échec et sélection*, CEDIC 1977.

(5) S. Baruk : *Echec et Maths* (1973) ; *Fabrice...* (1977) ; *L'âge du capitaine* (1985), Seuil.

(6) L. Weyl-Kayley : *Victoire sur les maths*, Robert Laffont, 1985.

(7) J. Nimier : *Mathématiques et affectivité*, Ed. Stock.

(8) G. Choquet : *Heuristique et déduction*, *Bulletin* A.P.M.E.P. 365.

(9) F. Reynes : *Langage, synonymie, démonstration*. *Bulletin* A.P.M.E.P. 331.

(10) B. Charlot : *Histoire de la réforme des "maths modernes"*, *Bulletin* A.P.M.E.P. 352.

(11) Giordan et De Vecchi : *Les origines du savoir*, Delachaux et Niestlé, 1987.

(12) J. Weizenbaum, interview au Nouvel Observateur 02/12/1983, mais surtout *"Puissance de l'ordinateur et raison de l'homme"*, Ed. d'informatique, 1981.

(13) P. Watzlawick et al. : *Changements*. Ed. Seuil, 1975.

(14) Bulletin E.P.I. n° 51, septembre 88, p. 8.

(15) F. Boule : *A propos d'un projet de réforme*. *Bulletin* A.P.M.E.P. 299, juin 1975.