une présentation possible de la notion de limite à partir des fonctions monotones

par A. Antibi
IREM de Toulouse

Introduction

Depuis plusieurs années, l'enseignement des limites a suscité dans l'enseignement secondaire bon nombre de débats et de controverses. Des modifications de programmes importantes se sont succédées et ont dérouté beaucoup de personnes, davantage les enseignants que les élèves d'ailleurs, dans le secondaire tout au moins (les enseignants du supérieur se préoccupant souvent très peu des programmes exacts du secondaire).

Les difficultés liées à la notion de limite peuvent se regrouper en deux catégories : d'une part les difficultés qui concernent la compréhension du concept lui-même, et d'autre part, celles qui proviennent de l'utilisation du concept. Il ressort de notre expérience d'enseignants et des études effectuées sur ce sujet (*) que, pour beaucoup d'élèves et d'étudiants, la notion de limite se conçoit et se visualise souvent dans le cas des fonctions monotones. Ceci peut provenir du fait que, pour la plupart des fonctions, cette hypothèse de monotonie est satisfaite, au moins localement. Mais une raison plus importante doit être que, dans le langage courant, les mots "limite", "tendre vers", sont souvent utilisés dans des situations où il est question de rapprochement monotone.

Tenant compte de cela, on peut essayer de présenter cette notion en restant le plus près possible du langage courant, et en contrariant le moins possible les conceptions spontanées de l'élève, c'est-à-dire les idées qu'il a a priori sur ce sujet. Dans cette perspective, il semble préférable de commencer l'étude des limites dans le cas des suites monotones de nombres réels. Une expérimentation réalisée dans une classe de Première S, semble confirmer ce point de vue.

Après avoir exposé succinctement et commenté cette expérimentation, nous proposerons une présentation possible de la notion de limite. On verra enfin, en conclusion, comment peut se situer cette étude par rapport à l'enseignement dans les lycées.

(*) Cf. par exemple les thèses de Bernard Cornu ([C]) et d'Aline Robert ([R]).

Compte rendu de l'expérimentation

Elle eut lieu dans une classe de 30 élèves de Première S du lycée St-Sernin de Toulouse, le lundi 8 février 1988 de 9 h 10 à 11 h, avec une récréation de 10 minutes (de 9 h 55 à 10 h 05) ; Roselyne MARQUES, professeur de mathématiques de cette classe, était présente ; elle prit des notes et s'occupa de l'enregistrement de la séance. Les élèves ne m'avaient jamais vu auparavant et étaient prévenus de mon arrivée.

Ils étudiaient les suites depuis une semaine environ, mais n'avaient jamais entendu parler de limite. Ils avaient déjà vu les suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, et des exemples de suite $u_n = f(n)$, de suites récurrentes, de suites arithmétiques et géométriques.

La séance se déroula essentiellement sous forme de dialogue entre les élèves et moi, qui faisais cours au tableau en posant de nombreuses questions. Un élève sur deux environ participa oralement à cet échange.

Nous allons donner un bref compte rendu de la séance. On pourra consulter un compte rendu plus détaillé dans $[A_1]$ ou $[A_2]$.

Titre de la leçon : Notion de limite

***Première étape** : Etude des majorants d'une suite croissante*

Je rappelle d'abord la définition d'une suite croissante et d'un majorant d'une suite ; les élèves semblaient déjà tout à fait familiarisés avec ces notions. Je propose ensuite les trois exemples suivants :

$$1)\ u_n = 2n+1 \qquad 2)\ u_n = 10^n \qquad 3)\ u_n = 2 - \frac{1}{n}$$

La croissance de ces suites est pressentie par beaucoup d'élèves qui avaient déjà vu des exemples analogues. Je me contente alors d'en indiquer une démonstration orale.

"Ces suites sont-elles majorées ?"

Là aussi, beaucoup d'élèves donnent la réponse. Après avoir démontré, oralement et en m'aidant d'une représentation graphique, que les deux premières ne sont pas majorées, j'insiste plus particulièrement sur la troisième suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$:

"Pouvez-vous indiquer un majorant de cette suite ?"

Réponse immédiate d'un élève : *"2"*.
Je demande alors :

"Y a-t-il d'autres majorants ?"

Réponse d'un élève : *"Oui, tous les nombres supérieurs à 2"*.

J'en profite alors pour énoncer et démontrer la propriété générale suivante :

> Tous les nombres supérieurs à un majorant d'une suite sont aussi des majorants de cette suite.

Deuxième étape : Introduction de la notion de limite (cas des suites croissantes)

Je demande :

"Intuitivement, sans savoir exactement ce que signifie le mot "limite", qu'avez-vous envie de dire de chacune de ces suites ?"

Au sujet de la suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$, plusieurs élèves interviennent spontanément et on peut relever des réponses telles que :

"La suite (u_n) tend vers 2"
"La suite (u_n) converge vers 2"
"Ça se rapproche de 2".

Je demande alors :

"Qu'en est-il des deux premières suites ?"

Là encore, spontanément, on entend la réponse :

"La suite (u_n) tend vers $+\infty$".

Il est clair, bien sûr, que les élèves avaient dû rencontrer le symbole "$+\infty$" auparavant, ne serait-ce que dans l'écriture d'un intervalle du type $[a, +\infty[$.

Je leur demande alors ce qui, à leur avis, pour la troisième suite, caractérise ou particularise le nombre 2.

Première réponse : *"On ne peut jamais avoir cette valeur"*.

Ce à quoi je réponds que l'on ne peut pas, non plus, avoir la valeur 3 ni la valeur $\frac{1}{2}$; on ne peut donc pas dire que le nombre 2 est caractérisé par le fait que $2 - \frac{1}{n}$ n'est jamais égal à 2.

Deuxième réponse : *"2 est le plus petit majorant de la suite"*.

Je leur demande alors :

"Est-ce bien vrai ? C'est un majorant ; on l'a déjà vu. Est-ce le plus petit ? Comment le démontrer ?"

Je dois dire que, contrairement à ce qui s'était passé jusque là, les élèves ont hésité et n'ont pas répondu à cette question aussi spontanément qu'aux précédentes. Plusieurs réponses incorrectes furent données ; puis un élève dit :

"On écrit que les nombres inférieurs à 2 ne peuvent pas être majorants de la suite".

J'approuve cette suggestion. Je donne alors une démonstration détaillée de cette propriété.

Le comportement des élèves durant mon exposé indique clairement que la majorité d'entre eux auraient eu du mal à démontrer seuls cette propriété.

Je propose ensuite aux élèves les définitions suivantes :

Définitions :

On dit qu'une suite croissante majorée tend (ou converge) vers le plus petit de ses majorants, ou encore qu'elle admet pour limite le plus petit de ses majorants.

(A noter que l'existence du plus petit majorant est acceptée sans aucune difficulté par les élèves ; je n'en parle pas, mais peut-être pourrait-on énoncer sans démonstration une propriété générale à ce sujet; on y reviendra plus loin).

On dit qu'une suite croissante non majorée ne converge pas ou encore qu'elle diverge. On dit aussi qu'elle tend vers $+\infty$.

Signalons qu'il n'est peut-être pas très heureux de proposer aux élèves trois terminologies différentes pour traduire le même concept; mais il me semble difficile, compte tenu de nos habitudes, de modifier d'un coup cet usage.

***Troisième étape** : Cas des suites décroissantes*

Le passage des suites croissantes aux suites décroissantes ne semble soulever aucune difficulté : des élèves donnent très vite des exemples de suites décroissantes minorées ($u_n = \frac{1}{n}$) et non minorées ($u_n = -2n+1$), signalent que tout nombre plus petit qu'un minorant est a fortiori un minorant ; ils se doutent que l'on dira qu'une suite décroissante minorée tend vers le plus grand de ses minorants et qu'une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$;

Je leur demande des exemples de suites décroissantes tendant vers un nombre x_0 donné. On obtient, rapidement, la réponse "$x_0 + \frac{1}{n}$".

Je demande s'il y en a d'autres ; on obtient les réponses

$$"x_0 + \frac{1}{n^2}" \qquad \text{puis} \qquad "x_0 + \frac{1}{n+1}".$$

J'énonce alors les deux définitions suivantes, déjà pressenties par beaucoup d'élèves :

Définitions :

On dit qu'une suite décroissante minorée tend (ou converge) vers le plus grand de ses minorants, ou encore qu'elle admet pour limite le plus grand de ses minorants.

On dit qu'une suite décroissante non minorée ne converge pas ou encore qu'elle diverge. On dit aussi qu'elle tend vers $-\infty$.

Je propose, dans le cas d'une suite monotone convergente, la notation "$\ell = \lim u_n$".

Quatrième étape : Formalisation de la convergence d'une suite valable à la fois pour les suites croissantes majorées et pour les suites décroissantes minorées. Définition de la convergence dans le cas général.

Je me proposais dans cette partie d'établir, dans le cas d'une suite croissante majorée, l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $\ell = \lim u_n$

(2) $[\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant \ell]$ et $[\forall \ell' < \ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} ;\ u_{n_0} > \ell']$

(3) $\forall \ell' < \ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant n_0,\ \ell' < u_n \leqslant \ell$

puis, de manière analogue, dans le cas d'une suite décroissante minorée, l'équivalence des propriétés

(1') $\ell = \lim u_n$

(2') $[\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant \ell]$ et $[\forall \ell' > \ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : u_{n_0} < \ell']$

(3') $\forall \ell' > \ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant n_0,\ \ell \leqslant u_n < \ell'$

J'envisageais ensuite de rechercher avec les élèves une formulation de la convergence valable dans les deux cas et de voir apparaître ainsi, d'après (3) et (3') la formulation classique.

(4) $\forall$I intervalle ouvert de centre ℓ, $\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in I$

puis la formulation

(5) $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \epsilon$

Après avoir commenté ces deux formulations, je me proposais de rechercher des exemples de suites oscillantes dont on a envie de dire intuitivement qu'elles convergent ($\frac{(-1)^n}{n}$ ou $2+\frac{(-1)^n}{n}$ par exemple) et de remarquer que les limites "intuitives" de ces suites (0 et 2 pour les exemples précédents) vérifient les formulations (4) ou (5). En définitive, ces formulations traduisent l'idée intuitive de limite pour les suites monotones et pour les suites u_n oscillantes autour de ℓ telles que $|u_n-\ell|$ tende vers 0 en décroissant. J'envisageais alors de proposer les formulations (4) et (5) comme définition de la limite d'une suite (u_n) dans le cas général.

Je n'ai pu qu'aborder le tout début de cette partie car, à la suite d'une question d'une élève concernant la propriété (2) précédente, *"Pourquoi écrire $u_n \leqslant \ell$ et non $u_n < \ell$ puisque u_n n'atteindra jamais ℓ ?"* un débat animé sur la convergence des suites stationnaires eut lieu, à la grande satisfaction des élèves d'ailleurs qui ne semblaient pas très passionnés à l'idée de démontrer des équivalences.

Il ressort de cette discussion les points importants suivants :

Les élèves éprouvent peu de "sympathie" pour la convergence des suites monotones stationnaires. En effet, ils ne comprennent pas trop, dans le cas d'une suite croissante par exemple, comment une suite peut à la fois tendre vers ℓ et atteindre déjà cette valeur à partir d'un rang n_0. Il s'agit peut-être ici d'un problème dû essentiellement à la terminologie.

D'autre part, les suites $u_n=f(n)$, ou les suites récurrentes $v_n=g(v_{n-1})$, construites à partir des fonctions usuelles, ne sont en général pas stationnaires (sauf dans le cas trivial où f ou g est une fonction constante). Ceci concerne en réalité la manière d'expliciter une suite stationnaire et non pas le concept de convergence d'une telle suite.

On peut noter au passage le problème suivant, non spécifique au problème de limite d'une suite : l'aspect sécurisant et rassurant de LA formule en mathématique.

Les élèves semblent bien plus convaincus de l'existence de la suite $u_n=\inf(n^2,5)$ que de la suite $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=4$, $u_n=5$ pour tout $n \geqslant 3$.

Quelques commentaires complémentaires

On peut souligner les points suivants apparus, pour la plupart, au cours de l'expérimentation :

• Dans le cas des suites croissantes majorées, la définition de la limite comme le plus petit des majorants semble tout à fait correspondre à l'idée intuitive des élèves et à la visualisation qu'ils ont de cette notion.

• Le passage des suites croissantes aux suites décroissantes ne semble présenter aucune difficulté.

• La définition du concept de limite d'une suite que nous avons donnée dans le cas monotone semble pouvoir être comprise et assimilée aisément.

• Par contre, l'utilisation de cette définition pour démontrer directement qu'un nombre ℓ est limite d'une suite monotone est moins spontanée et doit être traitée avec soin : ainsi par exemple, dans le cas d'une suite croissante, les élèves connaissent en général la méthode pour démontrer qu'un nombre ℓ est un majorant d'une suite, mais, pour démontrer que c'est le plus petit, ils ont du mal à démarrer la démonstration. Ce genre d'activité me semble important et formateur ; on peut ainsi, dans le cas particulier plus simple des fonctions monotones, initier les élèves à un type de démonstration important en analyse.

• Le cas particulier des suites monotones stationnaires mérite un traitement particulier : la convergence dans ce cas n'est pas perçue aussi facilement que dans le cas général d'une suite monotone non stationnaire.

• Le fait de commencer par donner la définition de la convergence d'une suite dans le cas monotone présente un autre avantage : on donne ainsi aux élèves, sous forme de définition, des propriétés caractéristiques fondamentales des suites monotones convergentes.

• Il y a, certes, un inconvénient : certains élèves pourraient croire qu'une suite majorée quelconque (pas forcément monotone) converge toujours vers le plus petit de ses majorants. Ce genre d'inconvénient se rencontre souvent dans notre enseignement ; il convient d'en avoir conscience et d'insister auprès des élèves, à l'aide de contre-exemples, pour leur montrer que ce n'est pas vrai. Quoi qu'il en soit, il semble que les avantages de cette présentation sont suffisamment importants pour que l'on accepte un tel inconvénient.

• Doit-on signaler, dans une classe de Première déjà, que, si une suite de réels est majorée, il existe toujours un majorant plus petit que tous les autres ,? Peut-être ; bien que ce problème ne semble absolument pas préoccuper les élèves. Il conviendrait alors de commencer par signaler que cette propriété n'est pas vraie dans tous les ensembles de nombres (considérer par exemple, dans l'ensemble des décimaux, $u_0 = 0$; $u_1 = 0{,}3$; $u_2 = 0{,}33$ etc...) puis de dire clairement qu'on l'admet dans $\mathbf{R}$.

Proposition de présentation de la notion de limite dans R

En nous appuyant sur ce qui précède, nous allons indiquer les grandes lignes d'une présentation possible de la notion de limite d'une suite dans **R**. Nous proposerons ensuite succinctement, dans le cas des limites de fonctions, une présentation utilisant les limites de suites.

A. Cas des suites

1) *Etude préliminaire*

Exemples de suites. Définition d'une suite.

Suites croissantes, décroissantes.

Suites majorées, minorées, bornées. Tout nombre supérieur à un majorant d'une suite est aussi un majorant. Tout nombre inférieur à un minorant est un minorant.

2) *Cas des suites croissantes*

On peut constater sur des exemples l'existence dans **R**, pour une suite croissante majorée, d'un plus petit majorant. On peut ensuite énoncer et admettre cette propriété dans **R** dans le cas général.

A partir d'exemples, on peut voir apparaître puis proposer les définitions suivantes :

"Si (x_n) est une suite croissante majorée, on dit que (x_n) tend vers le plus petit de ses majorants".

"Si (x_n) est une suite croissante non majorée, on dit que (x_n) tend vers $+\infty$".

3) *Cas des suites décroissantes : étude analogue au cas précédent*

Dans ces deux cas, il conviendrait de ne pas négliger l'étude des suites monotones stationnaires.

4) *Introduction de la définition dans le cas général*

On peut d'abord faire rechercher une définition de la convergence commune au cas des suites croissantes et des suites décroissantes, et retrouver ainsi la définition générale classique de la convergence d'une suite.

On peut ensuite faire constater sur quelques exemples que les limites "intuitives" de suites (u_n) oscillantes autour de ℓ et telles que $|u_n - \ell|$ tende vers 0 en décroissant $(2 + \frac{(-1)^n}{n}$ par exemple) vérifient la formulation commune trouvée précédemment.

On peut alors proposer la définition de la convergence d'une suite dans le cas général, avec des intervalles puis avec des ϵ.

On peut ensuite utiliser cette définition pour étudier des exemples de suites divergentes non monotones telles que $(-1)^n$, et des exemples de suites convergentes non monotones et non oscillantes telles que $\frac{\sin n}{n}$.

La définition générale d'une suite tendant vers $+\infty$ peut s'introduire en remarquant qu'il est assez normal, dans ce cas, de remplacer, dans la définition générale d'une limite, les intervalles ouverts centrés en ℓ par des "intervalles ouverts centrés en $+\infty$", c'est-à-dire de la forme $]a, +\infty[$. Le cas d'une limite $-\infty$ peut se traiter de manière analogue.

B. Cas général des limites de fonctions de R dans R

Je n'ai pas fait d'expérimentation dans ce cas. Il me semble néanmoins que, toujours dans le but de définir les concepts en restant le plus près possible de la terminologie utilisée, on peut, en s'appuyant sur l'étude des suites, proposer la définition suivante (valable aussi dans le cas où ℓ et x_0 ne sont pas finis)

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 $\Longleftrightarrow$ pour toute suite (x_n), $(f(x_n))$ tend vers ℓ si (x_n) tend vers x_0

ou encore, si on préfère une définition ne faisant pas intervenir la valeur éventuelle de f en x_0 :

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 $(x \neq x_0)$ $\Longleftrightarrow$ pour toute suite (x_n), $(f(x_n))$ tend vers ℓ si (x_n) tend vers x_0 (avec $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n \neq x_0$).

On peut aussi définir ainsi les limites à droite et à gauche.

Les propriétés des suites permettent d'établir immédiatement les propriétés classiques des limites dans ce cas. Je pense qu'il est inutile, dans le secondaire en tout cas, de donner la définition en (ϵ, η) qui effraie tellement les élèves, même après le baccalauréat.

Conclusion

Beaucoup d'enseignants déplorent le fait qu'aucune définition des limites ne figure dans les programmes du secondaire. De plus, l'utilisation systématique de quelques fonctions de référence peut donner naissance chez l'élève à certaines idées fausses sur les limites. Il peut par exemple penser que, pour déterminer la limite d'une fonction, il faut nécessairement pouvoir comparer cette fonction aux fonctions de référence.

D'autre part, il est vrai que, lorsque les définitions étaient au programme des classes de lycée, elles étaient présentées le plus souvent de manière trop abstraite et compliquée, et ne servaient peut-être pas à grand chose.

La présentation proposée ici permettrait peut-être de satisfaire les enseignants qui souhaitent être en mesure de définir toutes les notions qu'ils utilisent, sans dérouter les élèves pour autant.

Bibliographie

[A_1] André ANTIBI, 1988, *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions.* Thèse d'Etat, Université P. Sabatier, Toulouse.

[A_2] André ANTIBI, 1988, *Une présentation possible de la notion de limite à partir des fonctions monotones.* IREM de Toulouse.

[C] Bernard CORNU, 1983, *Apprentissage de la notion de limite ; conceptions et obstacles.* Thèse 3e cycle, Université Scientifique et Médicale, Grenoble.

[R] Aline ROBERT, 1982, *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur.* Thèse d'Etat, Université Paris VII.