Bulletin de l'APMEP n°370 - Septembre 1989

simple remarque à propos d'un tableau d'aide-mémoire

Edith Kosmanek

On trouve dans certains aide-mémoire un tableau analogue à celui reproduit ici. Les étudiants en premier cycle de Sciences Economiques, confrontés à ce tableau, émettent spontanément, en ce qui concerne les variables unidimensionnelles, les trois remarques pertinentes suivantes :

1. il manque un cas : tirage sans remise, à nombre de blanches fixé ;
2. pourquoi changer de modèle pour présenter la loi uniforme : boules numérotées au lieu de boules blanches et noires ?
3. peut-on résumer les différents mécanismes par un schéma unitaire ?

Les réponses sont relativement simples. En ce qui concerne les deux premières questions, on peut faire d'une pierre deux coups. En effet, la loi "Pascal sans remise" manquante qui répond à la première question admet comme cas particulier la loi uniforme.

Pour la loi "Pascal sans remise", on peut compléter sans trop de difficultés le tableau par les données suivantes :

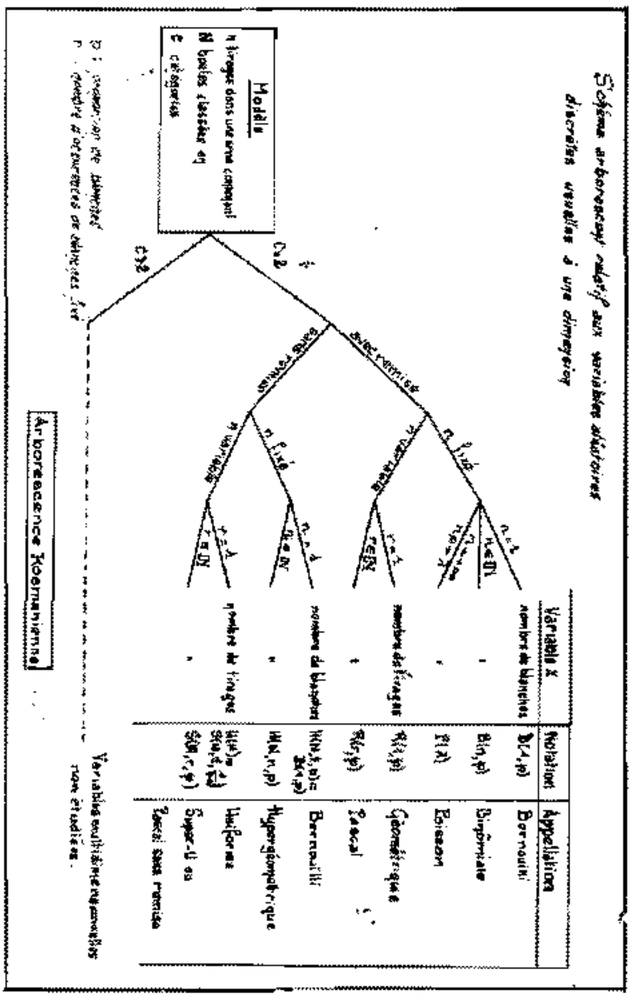
Loi	Valeurs possibles	Probabilités
PASCAL sans remise S (N, r, p)	{r, r+1,..., k, Nq+r}	$P(X=k) = \dfrac{C_{Np}^{r-1}\; C_{Nq}^{k-r}}{C_N^{k-1}} \; \dfrac{Np-r+1}{N-k+1}$

Espérance	Variance	Modèle
$r\dfrac{N+1}{Np+1}$	$rq\dfrac{N(N+1)(Np-r+1)}{(Np+1)^2\,(Np+2)}$	Dans une urne, deux catégorie de boules : proportion *p* de blanches et *q* de noires. On tire, sans remise jusqu'à obtenir *r* boules blanches. X est la variable aléatoire : nombre de tirages nécessaires.

Observations
On retrouve la loi de Pascal avec remise pour $N \to +\infty$ et la loi uniforme pour $p = \frac{1}{N}$ et $r = 1$.

Le changement de modèle pour la loi uniforme n'est donc pas nécessaire. Il suffit de tirer sans remise dans une urne contenant 1 seule blanche jusqu'à l'obtention de cette unique blanche.

Enfin, pour le schéma unitaire, le graphe arborescent ci-joint répond à la question (arborescence kosmanienne).



LOIS DE PROBABILITÉ :

LOI	VALEURS POSSIBLES	PROBABILITÉS DE CES VALEURS	ESPÉRANCE	
BERNOULLI $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0, 1\}$	$P[X=0]=1-p=q$ $P[X=1]=p$ où $0 \leqslant p \leqslant 1$	p	
BINOMIALE $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P[X=k]=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$ où $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $p+q=1$	np	
MULTINOMIALE	Ensemble des r-uples $[n_1, n_2, \ldots, n_r]$ tels que, $\forall i$, $0 \leqslant n_i \leqslant n$, et $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$	$P[X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots, X_r=n_r]=$ $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} \times p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$ où, $\forall i$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $\sum_i p_i = 1$	$E[X]=$ $[np_1, np_2, \ldots, np_r]$	
GÉOMÉTRIQUE $\mathcal{R}(1,p)$	$\{1, 2, \ldots, k, \ldots, +\infty\}$	$P[X=k]=q^{k-1}\,p$ où $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $p+q=1$	$\dfrac{1}{p}$	
PASCAL (parfois appelée « Binomiale négative ») $\mathcal{R}(r,p)$	$\{r, r+1, \ldots, +\infty\}$	$P[X=k]=C_{k-1}^{r-1}\, p^r\, q^{k-r}$ où $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $p+q=1$	$\dfrac{r}{p}$	
HYPER-GEOMETRIQUE	$\{0, 1, \ldots, N_1\}$ si $N_1 \leqslant n$ $\{0, 1, \ldots, n\}$ si $N_1 \geqslant n$	$P[X=k]=\dfrac{C_{N_1}^k\, C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$ $(N=N_1+N_2)$	np avec $p=\dfrac{N_1}{N}$	
MULTIHYPER-GÉOMÉTRIQUE	Ensemble des r-uples $[k_1, k_2, \ldots, k_r]$ tels que, $\forall i$, $0 \leqslant k_i \leqslant N_i$ et $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$	$P(X_1=k_1, X_2=k_2, \ldots, X_r=k_r)=\dfrac{C_{N_1}^{k_1}\, C_{N_2}^{k_2} \ldots C_{N_r}^{k_r}}{C_N^n}$ $\left[N=\sum_{i=1}^{r} N_i\right]$	$E[X]=$ $[np_1, np_2, \ldots, np_r]$ avec $p_i=\dfrac{N_i}{N}$	
POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$	$\{0, 1, \ldots, +\infty\}$	$P[X=k]=\dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$	λ	
UNIFORME SUR UN ENSEMBLE FINI $\mathcal{U}(n)$	$\{1, 2, \ldots, n\}$	$P[X=k]=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	

VARIABLES DISCRÈTES

VARIANCE	MODÈLE	OBSERVATIONS (*)
pq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On effectue un tirage. X est la variable aléatoire « nombre de boules blanches ».	
npq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On effectue n tirages avec remise. X est la variable aléatoire « nombre de boules blanches ».	Si $\begin{cases} X_1 \to \mathcal{B}(n_1, p),\ X_2 \to \mathcal{B}(n_2, p) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendants} \end{cases}$ alors $X_1 + X_2 \to \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
La matrice de Var-cov a pour terme général $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \delta_{ij}\, np_i - np_i p_j$ avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $= 1$ si $i = j$	Dans une urne r catégories de boules : proportion p_1 de la 1re catégorie, p_2 de la 2e, p_r de la r-ième. On effectue n tirages, avec remise. X est le vecteur aléatoire : $(X_1, X_2, \dots, X_r)$. X_i étant le nombre de boules de la i-ième catégorie.	Les différentes composantes de X : $X_1, X_2, \dots, X_r$ suivent des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_i)$. Elles sont liées par la relation $\sum_i X_i = n$.
$\dfrac{q}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On tire avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche. X est la variable aléatoire « nombre de tirages nécessaires ».	
$\dfrac{rq}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On tire avec remise jusqu'à obtenir r boules blanches. X est la variable aléatoire « nombre de tirages nécessaires ».	On retrouve la loi géométrique avec $r = 1$. Si $X_1 \to$ Pascal de paramètre r_1, $X_2 \to$ Pascal de paramètre r_2. Si X_1 et X_2 sont indépendants, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Pascal de paramètre $r_1 + r_2$.
$npq \dfrac{N-n}{N-1}$ avec $q = \dfrac{N_2}{N}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion N_1 boules blanches, N_2 de noires. On tire n boules sans remise. X est la variable aléatoire « nombre de boules blanches ».	On retrouve la loi binomiale à la limite où $N \to \infty$, $N_1 \to \infty$, $N_2 \to \infty$ avec $\dfrac{N_1}{N} \to p$, $\dfrac{N_2}{N} \to q = 1 - p$.
$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \dfrac{n(N-n)}{N^2(N-1)} \times N_i(N\delta_{ij} - N_j)$ $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ $\delta_{ij} = 0$ sinon.	Dans une urne, r catégories de boules ; N_i de la i-ième catégorie. On tire n boules sans remise. X est le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ X_i étant le nombre de boules de la i-ième catégorie.	On retrouve la loi multinomiale à la limite où $N \to \infty$, $N_i \to \infty$ $\dfrac{N_i}{N} \to p_i$.
λ	Loi limite d'une loi binomiale lorsque $n > 50$ et $p < 0.10$. Loi des événements « rares ».	Si $X_1 \to \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 sont indépendants alors : $X_1 + X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
$\dfrac{n^2 - 1}{12}$	Dans une urne, n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage, avec équiprobabilité de tirer chaque boule.	(*) $X \to A$ signifie : X suit la loi de probabilité A.