la classe de math au jour le jour

Si vous avez réussi, avec vos élèves, un cours, une séance de T.D. ou d'exercices, si vos élèves ont particulièrement bien réagi à un problème, une situation, envoyez-nous un compte rendu détaillé de votre activité en précisant la classe, le thème, le contenu précis et, si vous le souhaitez, les réactions de vos élèves, les vôtres, comment vous avez, ensuite, exploité les résultats. Si chacun envoie une idée, on pourra faire tout un livre !

Envoyez vos idées et aussi vos questions à :

Christiane MORIN
128, rue Font Del Mazet
34830 Clapiers

Voici un exemple de "Situation Problème" proposée à des élèves de Première F début octobre 1987.

Puisqu'aucun de ces élèves n'avait, en Seconde, abordé la géométrie dans l'espace, nous avons commencé l'année sur ce chapitre, travaillant avec les fiches de l'IREM de Lorraine [Dessiner l'espace, 1983] (1).

Fin septembre, tous les élèves avaient déjà réalisé *au moins* les fiches 1 à 14) plus quelques exercices (calculs d'aires ou de volumes par exemple) les complétant.

(1) Voir notes en fin d'article.

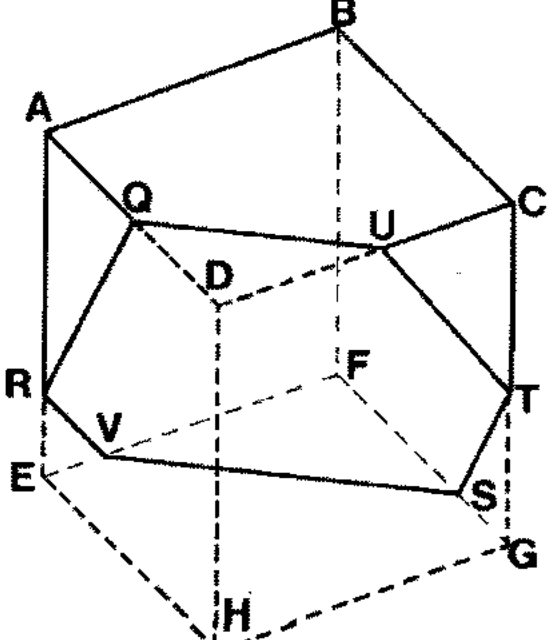
un exemple de "situation-problème" en géométrie dans l'espace

Jacques Verdier
Lycée A. Varoquaux 54510 Tomblaine

Nous avons, pour une séance prévue sur 3 heures (2 h classe entière + 1 h dédoublée), repris la fiche 8 pour chercher à résoudre le problème suivant :

> Connaissant le côté du cube (10 cm) et les mesures respectives de ER, QD et SG, soit 2, 5 et 3 cm, déterminer les dimensions de l'intersection (RQUTSV) et la tracer en vraie grandeur (2).
> Si le temps le permet, construire une maquette du cube coupé.

La figure en perspective cavalière est la suivante :



(*) Cet article est paru dans le *Bulletin* de la Régionale de Lorraine en décembre 1987.

Les élèves travaillaient en petits groupes de quatre. Dans chacun des groupes, un élèves était plus particulièrement chargé de prendre en note la "démarche", afin qu'il en reste une trace écrite.

Ce que je voudrais montrer ici, c'est la très grande diversité des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème, et leur grande capacité à réutiliser des acquis antérieurs (qu'ils avaient bien mémorisés, ou qu'ils retrouvaient grâce à leurs camarades ou à leur manuel) ou à trouver de nouveaux outils.

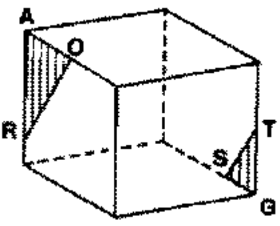
Seule une situation de travail autonome en petits groupes peut permettre au professeur d'observer ses élèves au travail : dans une situation "traditionnelle" (situation magistrale dite impositive, où l'information "descend" du professeur vers la classe), il est impossible — sauf si l'on a le don d'ubiquité — d'observer le comportement de ceux-ci. Il faut aussi "oser" les laisser faire et ne pas induire leur démarche en leur donnant trop de pistes au départ, ni trop les presser par des contraintes de temps.

Calcul des côtés

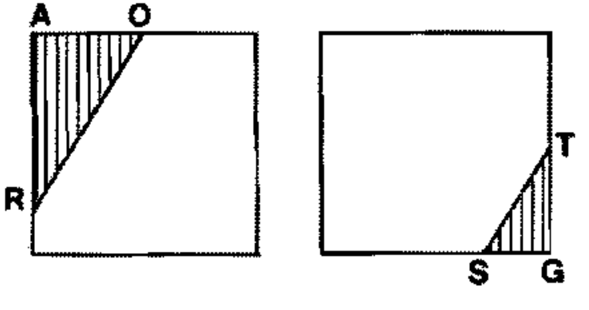
Spontanément, tous les élèves ont cherché à déterminer CU et CT, GT et GS, FS et FV, etc... pour trouver UT, TS, SV... par Pythagore.

Les triangles semblables ont été facilement repérés :

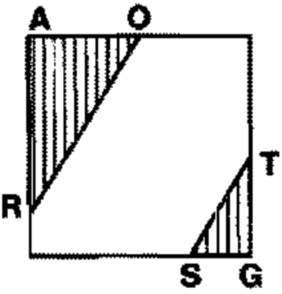
— soit directement sur la figure en perspective, par exemple



— soit en dessinant les faces parallèles côte à côte, en plan, par exemple :



— soit en "superposant" les faces parallèles (ce qui, en dessin technique, correspond à une vue de côté, une vue de face ou une vue de dessus), par exemple



Noter que, au vu de ces figures, la plupart des élèves disent appliquer "le théorème de Thalès" (3) ; d'autres parlent de triangles homothétiques.

Les côtés ont alors été trouvés :

— soit en écrivant des rapports de côtés correspondants dans ces triangles, par exemple : $\dfrac{AQ}{AR} = \dfrac{GS}{GT}$;

— soit en utilisant comme intermédiaires les rapports trigonométriques dans ces triangles rectangles (voir aussi en annexe la reproduction du début du travail d'un des groupes), par exemple :

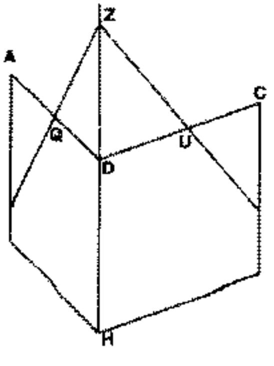
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AQ}{AR} = \dfrac{5}{8}$

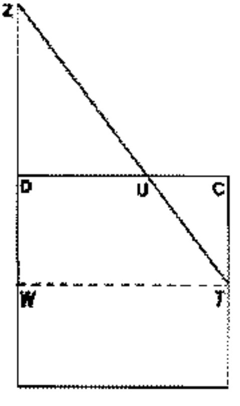
d'où $\alpha = 32{,}005...°$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{GS}{GT}$, d'où $GT = \dfrac{GS}{\text{tg}\ \alpha} = ...$ etc...

La difficulté rencontrée

Elle a été de calculer CU et UD. Il a fallu donner à beaucoup un "coup de pouce", en demandant aux élèves de retrouver comment ils avaient construit le point U (par prolongement de l'arête DH pour y porter Z, intersection de RQ et TU).





Le calcul de DU et CU se fait alors à l'aide de cette figure (où CT = 5,2 et DZ = 8). Là encore, les élèves appliquent ce qu'ils appellent "Thalès".

A remarquer qu'aucun ne connaît la propriété suivante des proportions :

$$\frac{DU}{DZ} = \frac{CU}{CT} = \frac{DU + CU}{DZ + CT}$$

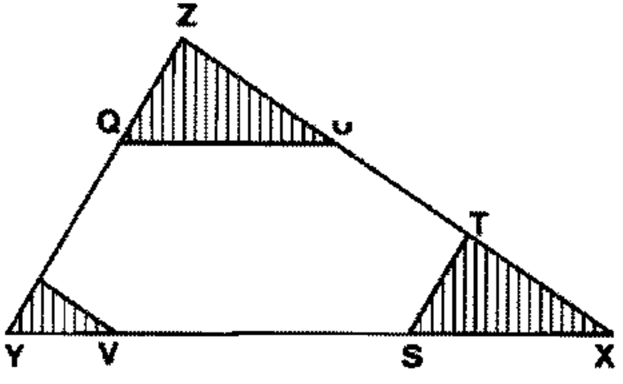
Construction de l'hexagone

Arrivé à ce stade du compte rendu, je voudrais inviter le lecteur — s'il ne l'a déjà fait — à essayer de résoudre ce problème et à construire effectivement, sur du bristol, l'hexagone matérialisant l'intersection du cube et du plan, puis à essayer d'imaginer quelles pourraient être (a priori) les stratégies développées par des élèves de première pour ce faire, et seulement après à poursuivre sa lecture.

PAUSE

Deux groupes de 8 ont prolongé les segments UT, VS et RQ en dehors de la figure, construisant les points X (intersection de UT, VS et HG) et Y (intersection de QR, VS et EH) de la même façon qu'ils avaient construit Z.

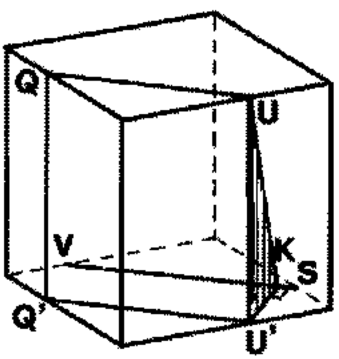
Par un calcul analogue à ceux faits dans la première partie (toujours "leur" Thalès et Pythagore), ils ont déterminé ZQ, ZU, XT, XS, YR et YV (ce qui était relativement simple), et ont construit l'hexagone par "amputation des coins" du triangle ZYX.

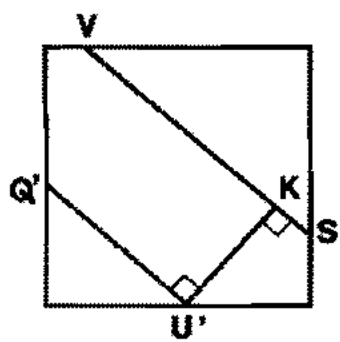


Six groupes sur 8 (à l'instar de leur professeur !) n'ont pas du tout eu l'idée de "sortir" du cube, et ont cherché comment construire un hexagone en connaissant les longueurs de ses 6 côtés (et sachant en outre que ces côtés étaient parallèles 2 à 2).

Dans un de ces groupes, les élèves étaient persuadés que la "hauteur" de cet hexagone (distance des droites QU et VS) était égale à celle du cube, soit 10 cm. Un des élèves n'a d'ailleurs jamais voulu en démordre, même après avoir eu entre les mains la maquette du cube (que j'avais préalablement construite) et y avoir mesuré une "hauteur" de 11,2 cm !

La plupart des groupes ont cherché *par tous les moyens* (!) à déterminer cette hauteur en se basant sur l'idée suivante : soit Q'U' la projection de QU sur le plan horizontal ; il suffit de déterminer la distance des deux droites VS et Q'U' dans le carré de base.



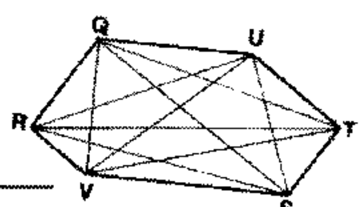


A ce niveau, un peu toutes les méthodes ont été utilisées, des plus simples aux plus "tarabiscotées".

Un autre groupe a cherché à déterminer les longueurs de toutes les diagonales de l'hexagone, pour tracer ensuite celui-ci au compas.

Pour les calculer, ils ont fixé un repère dans l'espace, porté par $(\vec{EH}, \vec{EF}, \vec{EA})$, et y ont déterminé les coordonnées des points Q, U, T...

Ce qui, avec



$$d(M,N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$$

(vu en classe la semaine précédente) leur a permis de tout trouver.

Un dernier groupe, enfin, cherchant désespérément une méthode, repérant dans le manuel le chapitre "Relations métriques dans le plan : A. Le triangle ; B. Les polygones", y a trouvé le théorème :

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$ et l'a utilisé pour chercher les angles de divers triangles (RQV, VQS, SQT et TQU), construisant ainsi l'hexagone en commençant par son angle Q.

J'ai pu remarquer, dans cette partie du travail, que les stratégies n'étaient pas très "fixées" : certains élèves essayaient de passer de l'une à l'autre dès qu'il y avait un point qui "leur résistait".

Les apprentissages réalisés

Une semaine après cette séquence, j'ai demandé aux élèves de me préciser par écrit ce qu'ils avaient appris de nouveau à l'occasion de la résolution de ce problème.

A part le groupe de quatre qui cite la relation

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A},$$

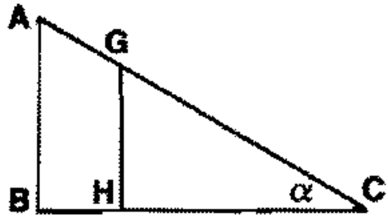
il est difficile de faire la part de ce qui a été véritablement découvert et de ce qui a été retrouvé ou "révisé" ; les formulations des élèves sont trop ambiguës. Ce qui est cité en premier (par plus de la moitié de la classe) est :

$$d(M,N) = \sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2}$$

(dont 7 élèves déclarent l'avoir "vu" pour la première fois), puis viennent les relations dans le triangle rectangle, les intersections de plans, et les triangles homothétiques (3 disent "hypothétiques" !) ou "Thalès". Deux élèves disent n'avoir rien appris, car ils savaient déjà tout.

Il faut cependant relativiser ces réponses : les élèves répondent plus en termes de "contenus" ou de propriétés qu'en termes de méthodes ou de démarches ; ils ont surtout appris, à mon avis, à utiliser leurs connaissances antérieures, à les réorganiser, à les "transférer".

Je laisse pour la fin ce petit papier d'Eric sur lequel était simplement écrit ceci :



Jusque là j'avais admis la relation

$$\frac{AB}{BC} = \frac{GH}{HC}$$

Maintenant j'ai compris pourquoi :

$$\frac{AB}{BC} = \mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{et} \quad \frac{GH}{HC} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Annexe

Début du brouillon de l'un des groupes

Demarche

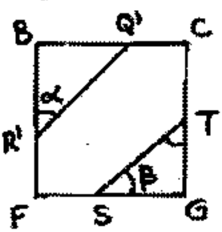
_ On regarde toute les données

- On en dæduit AR = 8 AQ = 5 SF = 7.

- On calcule QR avec Pythagore.

$QR = \sqrt{85} \simeq 9,4340$

_ Pour calculer ST. On projette la droite RQ sur la face BCGF par la direction (AB)



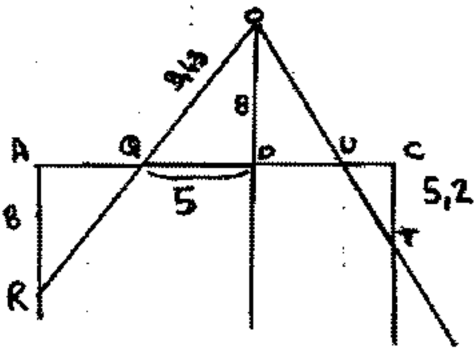
$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90 - \alpha$

$\beta = 57,9947°$

$ST = 5,6604$

$\left(\cos \beta = \frac{SG}{ST} \Rightarrow ST = \frac{SG}{\cos \beta}\right)$

$TG = \tan \beta \times SG = 4,8000$



$\dfrac{OD}{CT} = \dfrac{DU}{UC}$

$\dfrac{8}{5{,}2} =$

$\begin{cases} 8UC = 5{,}2\,DU \\ \cancel{DU} = 10 - UC \\ UC = 10 - DU \end{cases}$

$80 - 8DU = 5{,}2DU$

$DU = 6{,}060606$

---

(1) Vient d'être réédité : "Dessiner l'espace, 92 exercices pour les élèves de Seconde", IREM de Lorraine, 1989, 12 F + port 210 g.

(2) Je me permets de faire remarquer qu'une telle activité devrait avoir sa place en Seconde: elle permettrait aux élèves de réinvestir toutes les connaissances qu'ils y auraient acquises (ou "révisées"), donc de renforcer ces acquis.
Voir ci-dessous l'extrait du B.O. du 5/2/87 concernant le programme de géométrie de Seconde :

L'objectif de cette partie est d'une *grande importance* pour la formation de *l'ensemble* des élèves. Il s'agit *d'analyser* et de *réaliser des objets de l'espace physique*, de les *représenter* par des figures planes, de *reconnaître* et *d'exploiter les configurations élémentaires* intervenant dans ces problèmes et de *calculer* des distances, des aires, des volumes, ce qui permet à la fois d'investir la pratique de la géométrie plane dans des situations spatiales et de dégager quelques propriétés fondamentales de l'incidence, de l'orthogonalité et du repérage qui sont spécifiques à l'espace. Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace peut être utilisée durant toute l'année comme terrain pour mobiliser des acquis en algèbre, en analyse et en géométrie plane.

(3) "Thalès" n'est pas une conséquence des calculs sur les vecteurs. C'est une synthèse — que le plus *souvent l'élève se construit lui-même* — des "bricolages" qu'il a pratiqués sur des figures (telles que celles rencontrées ici).