géométrie de position

par J. Kuntzmann
Grenoble

La géométrie, telle qu'on la conçoit habituellement, consiste essentiellement à démontrer des égalités. Les exemples qui suivent cherchent à montrer qu'il existe des propriétés intéressantes concernant les positions relatives de certains éléments d'une figure.

Nous désignerons par A_1, A_2, A_3 les sommets d'un triangle non isocèle ayant trois angles aigus $\hat{A}_1 < \hat{A}_2 < \hat{A}_3$, par M_1, M_2, M_3 les milieux de ses côtés, par H_1, H_2, H_3 les pieds de ses hauteurs, par a_1, a_2, a_3 les longueurs de ses côtés, par G le centre de gravité, par K l'orthocentre.

1) Les parcours $A_1A_2A_3$, A_1A_2K, A_1A_3K, A_2A_3K font passer dans chacun de ces triangles du plus petit angle à l'angle moyen puis au plus grand. Si l'on affecte à K l'indice 4, cela donne (1,2,3)(1,2,4)(1,3,4)(2,3,4) où les indices vont toujours en croissant. Les sens de parcours sont tous les mêmes sauf celui de A_1A_3K.

2) Il est facile de voir à partir des propriétés des obliques que les points M_i et H_j se trouvent sur les côtés dans l'ordre

$$A_1M_3H_3 \quad A_2M_1H_1 \quad A_3H_2M_2A_1$$

3) Il en résulte que le point G se trouve dans le triangle KA_1H_3 et le point K dans le triangle GA_2A_3. La partie commune à ces deux triangles est le quadrilatère convexe Q : $KP'_{1,3}\,GP_{1,3}$. C'est aussi l'intersection des 3 triangles $A_iM_iH_i$ $i=1,2,3$ ou même $i=1,3$.

4) La bissectrice de $\hat{A}_i$ étant dans le triangle $A_iM_iH_i$, le point de contact J_i du cercle inscrit avec le côté opposé A_i se trouve dans ce triangle. Le point de concours des bissectrices I est dans Q.

5) Le centre O du cercle circonscrit se trouve dans M_2GM_3.

6) On sait que le cercle inscrit est tangent intérieurement au cercle des neuf points. On peut se demander où se trouve le point de contact. Il est sur la ligne des centres au-delà du centre du plus petit cercle. Projetons sur A_1A_2. Le centre du cercle des 9 points se projette en

$$\frac{A_2H_3 + A_2M_3}{2} = \frac{a_3 + \dfrac{a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{a_3}}{4} = \frac{2a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{4a_3}$$

et le centre du cercle inscrit en $p - a_2 = \dfrac{a_1 + a_3 - a_2}{2}$.

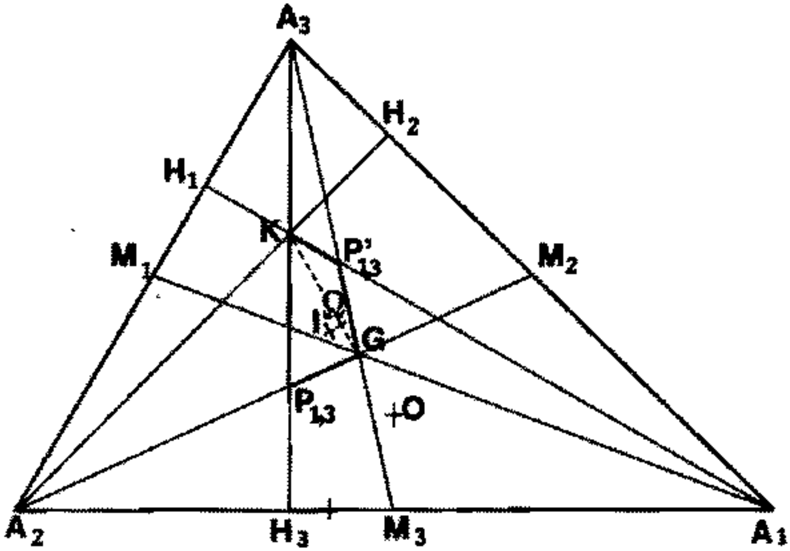
En écrivant que le premier est plus grand que le second, on trouve :

$$2a_3^2 + a_1^2 - a_2^2 > 2a_1a_3 + 2a_3^2 - 2a_2a_3$$

qui se réduit à

$$(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) > 2a_3(a_1 - a_2)$$

ce qui est bien exact, puisque $a_1 < a_2$ et $2a_3 > a_1 + a_2$.



Pour projeter sur A_2A_3, il suffit d'échanger les indices 1 et 3 :

$$(a_3 - a_2)(a_3 + a_2) > 2a_1(a_3 - a_2)$$

ce qui est bien exact aussi. Il en résulte que le contact est sur l'arc H_3M_1 du cercle d'Euler.

Remarque 1 : Cela ne démontre pas que les cercles sont tangents.

Remarque 2 : Soit Ω le centre du cercle des 9 points, I centre du cercle inscrit se trouve à la fois dans Q et dans $\Omega\ M_1A_2H_3$.

Pour finir, un *problème* que je vous laisse le soin de résoudre : "la ligne des centres peut-elle passer par A_2 ?" (Attention, il ne s'agit pas d'un triangle isocèle).