Bulletin de l'APMEP n°370 - Septembre 1989

études

Ptolémée, Al Kashi et les tables naturelles

Maurice Glaymann
IREM de Lyon

A la mémoire de mon cardiologue et ami, Michel Silie, à qui je dois tant ...

Le problème célèbre du calcul des valeurs approchées de sin 1° est dû à Claude PTOLÉMÉE .

Les travaux de PTOLÉMÉE et d'AL KASHI, pour résoudre ce problème, permettent de montrer comment ces mathématiciens ont construit les premières **tables de trigonométrie**, dites tables naturelles.

Nous allons suivre la démarche utilisée par PTOLÉMÉE dans son livre d'**Almageste** (il va de soi que nous utilisons ici les écritures et notations modernes).

Claude PTOLÉMÉE, mathématicien, astronome et géographe grec, né vers 90 à Ptolémaïs Hermius, a vécu à Alexandrie et mourut à Canopé vers 168. Il est considéré comme étant le plus grand astronome de l'Antiquité. Son livre **Grande Syntaxe Mathématique**, écrit en 140, a survolé les âges et fut appelé par les arabes "Al Magisti" ("la plus grande"), connu depuis sous le nom d'Almageste. Ce livre contient la somme des connaissances astronomiques de l'époque et a dominé l'astronomie jusqu'en 1543, date de la parution de **De Revolutionibus Orbium Coelestium** de COPERNIC.

AL KASHI est une très grande figure de la mathématique arabe; il est né dans le dernier quart du XIVème siècle, originaire de la ville iranienne de Kachan, située entre Téhéran et Ispahan. Vers 1420, il se rend à Samarcande où il dirige d'importants travaux d'astronomie. On lui doit de nombreux ouvrages d'astronomie et trois remarquables traités de mathématiques et entre autre **La clé de l'arithmétique** (Miftah al hisab), achevé en 1427; c'est un excellent guide de mathématiques élémentaires destiné à un très large public qui par la richesse de son contenu, sa clarté et son élégance, tient une place unique dans la littérature du Moyen Age. Une édition lithographique a paru à Téhéran en 1889. Parmi les travaux d'AL KASHI, citons sa contribution capitale au développement du calcul décimal, c'est le créateur de fractions décimales: il a calculé le nombre π, avec 14 décimales, record absolu pour l'époque et a développé un algorithme itératif qui se distingue par sa simplicité et sa rapide convergence, algorithme qu'il a utilisé pour calculer sin 1°.

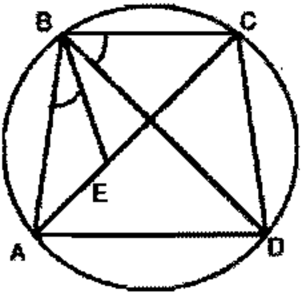
AL KASHI est mort vers 1436.

1.- Un théorème de géométrie

(appelé aujourd'hui *Théorème de PTOLÉMÉE*)

Dans tout quadrilatère inscriptible, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales.

Voici une démonstration de ce théorème.



On choisit le point E du segment AC, tel que $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$. Les triangles ABE et DBC sont *semblables;* il en résulte que $AE.DB = AB.DC$

et comme $AE = AC - EC$

il vient:

$$AB.CD = AC.BD - EC.BD$$

Les triangles BEC et BAD sont *équiangles;* il en résulte que:

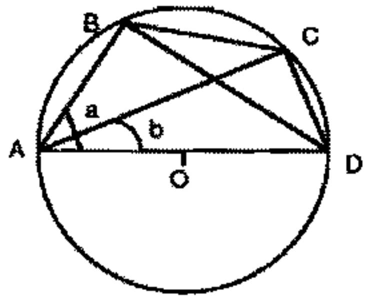
$$EC.BD = AD.BC$$

D'où: $$AC.BD = AB.DC + AD.BC \qquad (1)$$

Réciproquement, la condition (1) implique que le quadrilatère ABCD est inscriptible. Pour établir cette réciproque, le plus simple est de passer par une *inversion* (voir annexe 1).

2.- Les formules de PTOLÉMÉE

Plaçons-nous dans le cas particulier où AD est un diamètre du cercle G circonscrit au quadrilatère ABCD. Posons $\widehat{DAB} = a$ et $\widehat{DAC} = b$ et désignons par R le rayon du cercle G.



On en déduit:

$$BC = 2R \sin(a - b)$$
$$AB = 2R \cos a$$
$$BD = 2R \sin a$$
$$CD = 2R \sin b$$
et
$$AC = 2R \cos b$$

(1) donne alors

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad (2)$$

En changeant alors b en –b, il vient:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En changeant alors b en 90° – b, il vient:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (3)$$

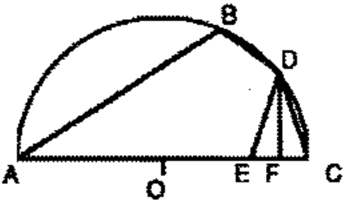
puis en changeant b en – b, on a

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (4)$$

(3) et (4) sont les formules de Ptolémée.

Pour aller plus loin, il faut établir une autre formule, dite d'*arc moitié*:

Ω est le demi-cercle de diamètre AC et de centre O et de rayon R; B est un point de Ω et D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{CB}$. E est le point du segment AC tel que AB = AE. Les triangles AED et ABD sont égaux et DE = DB = DC



La droite DF, bissectrice de l'angle $\widehat{EDC}$, est orthogonale à AC.

Désignons par 2α l'angle $\widehat{COB}$; on a

$$DC = 2R \sin\frac{\alpha}{2} \qquad AB = 2R\cos\alpha$$

$$CF = \frac{2R - AB}{2} \qquad DC^2 = CF.CA = R(2R - AB)$$

Il en résulte que: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

d'où la formule d'arc moitié: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Cette formule permet, connaissant $\sin\alpha$, de calculer $\cos\alpha$ à l'aide de $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ et d'en déduire $\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.- Le calcul de sin 36° et cos 36°

Le théorème d'Euclide (voir annexe 2) permet de justifier l'élégante construction de PTOLÉMÉE.

Considérons un demi-cercle de centre O et de diamètre AB. C désigne le milieu du segment OB.

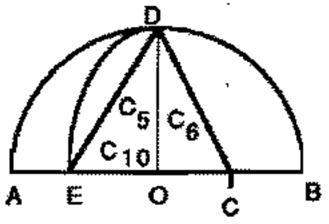
D est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$; E est le point du segment AO tel que CE = CD. ED = c_5 , OD = c_6 = R et OE = c_{10} sont les longueurs respectives des côtés du pentagone, hexagone et décagone réguliers.

Il en résulte que

$$c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$c_6 = R$$

$$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$



d'où $\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

et $\cos 36° = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5} + 6)}$

En effectuant les calculs avec 9 décimales, il vient:

$\sin 36° = 0{,}587\,785\,252$ et $\cos 36° = 0{,}809\,016\,994$

PTOLÉMÉE est alors équipé pour calculer des approximations de sin 1°.

4.- Le calcul de sin 1°

En utilisant alors la formule (2) avec a = 36° et b = 30° et compte tenu de

$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$ et de $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\,025\,404$

il vient: $\sin 6° = 0{,}104\,528\,463$ et $\cos 6° = 0{,}994\,521\,895$

La formule d'arc moitié donne alors:

$$\sin 3° = \sqrt{\frac{1 - \cos 6°}{2}} = 0{,}052\,335\,956$$

qui permet de calculer $\cos 3° = 0{,}998\,629\,534$

Et en recommençant, on obtient successivement:

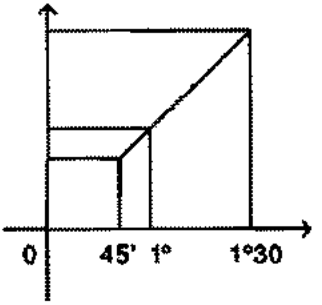
$\sin 1°\,30' = 0{,}026\,176\,948$ $\quad\cos 1°\,30' = 0{,}999\,657\,325$

et enfin $\quad\sin 45' = 0{,}013\,089\,595$

Une interpolation linéaire donne alors:

$$\sin 1° = \sin 45° + \frac{\sin 1°30' - \sin 45'}{3}$$

soit $\quad\sin 1° = 0{,}017\,452\,046$



PTOLÉMÉE a pris l'approximation $\sin 1° = 0{,}017\,452$ pour construire avec 6 décimales les premières tables naturelles.

5.- Les tables de sinus et de cosinus

En utilisant ce qui précède, nous pouvons comme Ptolémée, construire la table naturelle des fonctions sinus et cosinus.

Nous nous limiterons ici, en donnant ces tables sur l'intervalle [0, 10] avec le pas $h = 1°$.

	sin	cos
1	0,017 452	0,999 848
2	0,034 899	0,999 391
3	0,052 336	0,998 629
4	0,069 755	0,997 564
5	0,087 155	0,996 195
6	0,104 528	0,994 522
7	0,121 868	0,992 546
8	0,139 170	0,990 268
9	0,156 432	0,987 689
10	0,173 647	0,984 808

6.- AL KASHI et la trisection d'un angle

Au XVème siècle, AL KASHI, l'astronome de Samarcande, détermine des approximations de sin 1°, en reprenant le résultat de PTOLÉMÉE sin 3° = 0,052 335 956 mais au lieu d'utiliser une interpolation linéaire, il va résoudre algébriquement l'équation de la trisection d'un angle.

Notons au passage, qu'il effectue désormais les calculs en base *dix*, alors que PTOLÉMÉE ne disposait que de la base *soixante*.

Voici la démarche d'AL KASHI:

Sur le cercle γ de rayon R, de diamètre AO et de centre M, il prend trois arcs de même longueur $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$.

Γ est le cercle de diamètre AM. Les cordes AB, AC, AD coupent Γ respectivement en E, G et H.

Les arcs $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{EG}$ et $\overset{\frown}{GH}$ sont de même longueur. Il en résulte que

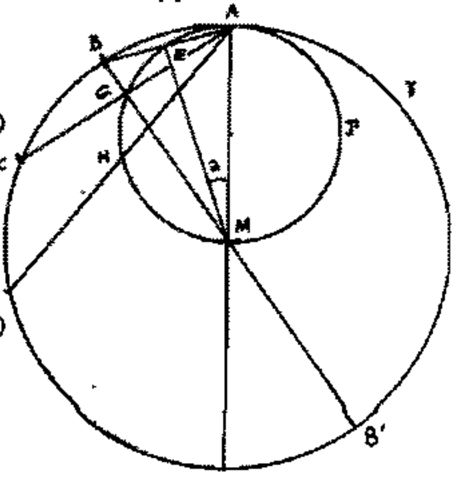
$$AE = EG = GH \qquad \text{et} \qquad AG = EH$$

L'application du théorème de PTOLÉMÉE, au quadrilatère AEGH, conduit à

$$AE.GH + EG.AH = AG.EH$$

ou $\quad AG^2 = AE\,(AE + AH) \qquad (5)$

B' désigne alors le point de γ, diamétralement opposé de B.



On a $\quad AG = GC$

et $\quad GA.GC = GB.GB'$

d'où $\quad AG^2 = BG\,(2R - BG) \qquad (6)$

D'autre part:

$$AB^2 = BG.BB' = 2R.BG$$

comme $\quad AB = 2\ AE$

il vient $\quad BC = 2\ \dfrac{AE^2}{R} \qquad (7)$

Il en résulte l'égalité

$$4\ AE^3 + AH.R^2 - 3R^2.AE = 0$$

En désignant enfin par a l'angle $\widehat{AME}$, on a:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

équation qui permet de calculer sin a connaissant sin 3a.

Ainsi, en posant, $\sin a = x$ et $\sin 3a = M$, il vient: $4x^3 - 3x + m = 0$.

C'est l'équation de la *trisection d'un angle.*

En particulier, pour $m = \sin 3° = 0{,}052\,335\,956$, elle fournit $x = \sin 1°$.

Pour effectuer les calculs, AL KASHI écrit cette équation sous la forme $x = \frac{1}{3}(4x^3 + m)$ et utilise l'algorithme $x_n = \frac{1}{3}(4x_{n-1}^3 + m)$.

En partant de $x_0 = 0$ et en effectuant les calculs avec neuf décimales, il vient:

$$x_1 = 0{,}017\,445\,318$$

$$x_2 = 0{,}017\,452\,397$$

$$x_3 = 0{,}017\,452\,406 = x_4$$

La convergence est rapide, ainsi au bout de quatre itérations, on a $x_3 = x_4$; on peut par ailleurs montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{3}(4x^3 + m)$ est contractante et que

$$|x_{n+1} - \sin 1°| \le k\,|x_n - \sin 1°| \qquad \text{avec} \qquad k \le 0{,}001\,296 .$$

AL KASHI a pris $\sin 1° = 0{,}017\,452\,406$, pour construire des tables avec 9 décimales. Nous nous limiterons ici, en donnant ces tables sur l'intervalle [0; 10] avec le pas h = 1°. (cf. page suivante).

La comparaison de ces tables avec celles de PTOLÉMÉE est intéressante. Notons cependant, qu'AL KASHI a effectué les calculs avec 14 décimales et à l'aide de son algorithme il a établi le résultat remarquable

$$\sin 1° = 0{,}017\,452\,406\,437\,283\,571$$

D'un point de vue historique et pédagogique, il est fort instructif, pour nos élèves, qu'ils aient construit une fois au moins dans la vie, de telles tables; car en effet, la plupart d'entre eux, pensent que telles les Tables de la Loi, elles sont tombées du ciel...

Une calculatrice moderne affiche pour sin 1°, avec 9 décimales, la valeur calculée par AL KASHI !

	sin	cos
1	0,017 452 406	0,999 847 695
2	0,034 899 496	0,999 390 827
3	0,052 335 956	0,998 629 534
4	0,069 756 473	0,997 564 050
5	0,087 155 742	0,996 194 698
6	0,104 528 463	0,994 521 895
7	0,121 869 343	0,992 546 151
8	0,139 173 101	0,990 268 068
9	0,156 434 465	0,987 688 340
10	0,173 648 177	0,984 807 753

Voici pour terminer un algorithme qui permet d'aller plus loin.

Γ est le cercle de centre O et de rayon 1; AD, DB et BE sont trois cordes égales de mesure α. Le point O voit AD sous l'angle x, AB sous l'angle 2x et AE sous l'angle 3x. β et γ sont les mesures des cordes AB et AE. CD est un diamètre de Γ. Comme le triangle CAD est rectangle, on a

$$AH.CD = AC.AD$$

ce qui donne

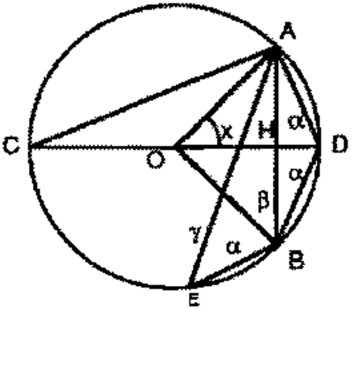
$$\beta = \alpha\sqrt{4-\alpha^2}$$

le quadrilatère ADBE est inscriptible et d'après le théorème de Ptolémée, on a

$$AB.DE = AE.DB + AD.BE$$

ce qui donne $\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\gamma$

il en résulte que $\gamma = 3\alpha - \alpha^3$.



Ainsi, connaissant α, cette formule permet le calcul de γ. Partons de $\alpha = \frac{2x}{3^n}$, en appliquant n *fois l'algorithme (4), on détermine la longueur* β (correspondant à l'angle 2x) et comme $\sin x = \frac{\ell}{2}$, il ne reste plus qu'à diviser le résultat par 2, pour avoir $\sin x$. Lorsque x est exprimé en radians et que n est grand, la corde vue de O sous l'angle α, vaut α. D'où le programme

```
10  INPUT X
20  INPUT N
30  L=2*X/3↑N
40  L=L*(3-L*L)
50  N=N-1
60  IF N>0 GOTO 40
70  PRINT L/2
80  GOTO 10
90  END
```

Pour calculer $\sin 1°$, il faut prendre $x = \frac{\pi}{180}$.

Voici les résultats obtenus pour différentes valeurs de n:

n	sin 1°
1	0,017 452 504 89
2	0,017 452 417 37
3	0,017 452 407 65
4	0,017 452 406 57
5	0,017 452 406 45
6	0,017 452 406 44
7	0,017 452 406 44

ainsi, avec 11 décimales, on a: $\sin 1° = 0{,}017\,452\,406\,44$

Ce résultat est moins bon que celui d'AL KASHI ! Il ne reste plus qu'à admirer les résultats obtenus par PTOLÉMÉE et d'AL KASHI ... qui effectuaient leurs calculs à la main.

Annexe 1 Théorème de PTOLÉMÉE et l'inversion

Rappel

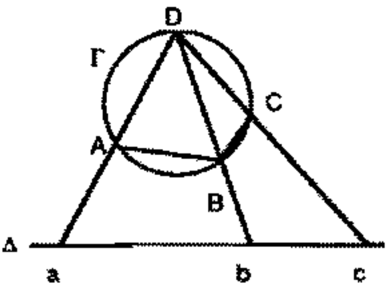
Dans l'inversion J de pôle O et de rapport k, on a entre un couple de points (M, N) et son image (M', N') l'égalité

$$M'N' = \frac{|k|\ MN}{OM.ON}$$

I désigne alors l'inversion de centre D et de rapport k.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle G.

L'image de G par I est la droite Δ et si a, b et c sont les images par I des points A, B et C on a: $ab + bc = ac$ (1)



Il en résulte

$$\frac{AB}{DA.DB} + \frac{BC}{DB.DC} = \frac{AC}{DA.DC}$$

soit

$AB.DC + BC.DA = AC.DB$ (2)

C'est le théorème de Ptolémée.

Réciproquement, l'égalité (2) entraîne (1), donc l'alignement des points a, b et c, par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

Notons que si les points a, b et c ne sont pas alignés alors $ac < ab + bc$, ce qui par inversion conduit à quatre points A, B, C et D non cocycliques et donc à l'inégalité stricte $AB.DC + BC.DA > AC.DB$

Remarque: Il est intéressant de généraliser ce résultat à l'espace: le produit des longueurs de deux arêtes opposées d'un tétraèdre est inférieur à la somme des produits des deux autres couples d'arêtes.

Annexe 2 Théorème D'EUCLIDE

Voici la construction conjointe du pentagone p_5 et du décagone p_{10}.

Supposons le problème résolu: les points A, B, C, D, E, F partagent le demi-cercle de diamètre AF en 5 arcs égaux. P est le point d'intersection des segments OB et AD.

Les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOD}$ valent respectivement $a = \frac{\pi}{5}$ et $b = \frac{2\pi}{5}$

Posons $c_{10} = AB = x$ $\quad AD = y$ $\quad$ et $c_5 = DF$

On a $AB = AP$ $\quad$ et $\quad DP = OD = R$

De $AP + PD = AD$, $\quad$ on tire $\quad y - x = R$

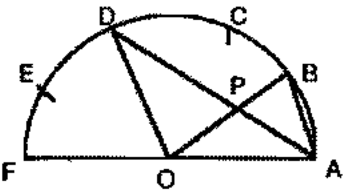
et d'autre part, $\quad R^2 - PO^2 = PA.PD$

ou encore $\quad x^2 + xR - R^2 = 0$

Ce qui permet le calcul de x et y:

$$x = (-1 + \sqrt{5})\frac{R}{2}$$

et $\quad y = (1 + \sqrt{5})\frac{R}{2}$



Comme le triangle ADF est rectangle, on a: $\quad c_5^2 = 4R^2 - y^2$

d'où $\quad c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad$ et $\quad c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Il est alors facile de justifier la construction de PTOLÉMÉE.

Notons au passage que y est la longueur du côté du décagone régulier étoilé.

Bibliographie

1. AYMES, "Trisection de l'angle". Brochure APMEP.

2. C.B. BOYER, A history of Mathematics. J. Wiley, 1968.
3. J.P. COLLETTE, Histoire des Mathématiques.
4. A. ENGEL, Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique. Cedic, 1979.
5. M. GLAYMANN et J. MALAVAL, Mathématique Seconde. Cedic, 1981.
6. F. KLEIN, Elementary Mathematics from an advanced standpoint. Dover publications, 1960.
7. N. MAHAMMED, Sur la résolution des équations algébriques. Histoire des Sciences. Deug A - 1ème année. Université de Lille 1, 1980.
8. A.P. YOUSCHKEVITCH, Les mathématiques arabes. Vrin, 1976.