propriété de pythagore (classe de troisième technologique)

Jean-Pierre Orhan, Christian Giraud
Académie de Rouen

Mise en relation des capacités transversales, des méthodes et des contenus.
Situations de découvertes, de maîtrise, d'évaluation.

Introduction

Le projet de séquence d'apprentissage présenté ici a été élaboré au cours d'un stage PAF durant l'année scolaire 1987/88 et expérimenté la même année.

L'objectif était d'étudier, à partir d'un exemple, comment il était possible de mettre en œuvre les recommandations pédagogiques du programme :
— des séquences longues de réflexion et de recherche
— le développement de capacités transversales (définies ci-après).

Il ne s'agit pas d'un cours complet, la phase de mise en forme des connaissances (qui est généralement faite sans difficulté par les enseignants) n'est pas développée ici.

I. Les capacités transversales

Extrait du programme : B.O. spécial n° 6 - 10 sept. 87 - p. 18 :

"L'enseignement des mathématiques en quatrième et troisième technologique doit permettre le développement des capacités transversales :
— connaître (outils, méthodes, langage, critères...)
— analyser et comprendre (inventorier, traduire, organiser...)
— réaliser et appliquer (choisir, traiter, exécuter)
— évaluer (vérifier, contrôler, valider)
— communiquer à l'écrit et à l'oral".

En fait, les capacités utilisées dans les situations qui suivent sont celles du nouveau référentiel de mathématique des lycées professionnels qui sera diffusé au cours du deuxième trimestre 1989.

Les différences sont minimes, seule la capacité "connaître" du programme des classes technologiques n'est pas reprise dans le référentiel (les compétences caractéristiques sont réparties dans les autres capacités).

Analyser c'est :
— inventorier
— traduire
— organiser
des informations quel que soit le mode de transmission.

Réaliser c'est :
— choisir : un vocabulaire, un concept, un outil, un instrument, un modèle, une démarche, une méthode, une solution
— traiter : programmer, organiser un algorithme, une technique de résolution ou de construction
— exécuter : effectuer les opérations du traitement.

Critiquer valider c'est :
— vérifier la vraisemblance du résultat
— prouver l'exactitude de la réponse
— évaluer la méthode utilisée.

Rendre compte c'est :
— présenter des résultats
— structurer un compte rendu,
il s'agit de transmettre, oralement ou par écrit, un ensemble organisé d'informations avec un vocabulaire adapté.

II. Les méthodes

Il est précisé dans le programme : "Les séquences courtes (informations données par le professeur, exercices d'application directe) doivent se combiner avec des séquences plus longues de réflexion et de recherche".

Un exemple d'une telle séquence de réflexion et de recherche est donné ci-après dans la partie *"Situation de découverte"*.

Des exercices plus courts sont rassemblés dans la partie *"Situations de maîtrise"*. Ils visent à proposer, *de façon analytique*, des activités permettant de développer essentiellement une capacité afin d'organiser des apprentissages méthodiques.

Une ***situation d'évaluation*** est proposée dans la dernière partie. Plus *synthétique*, elle vise à évaluer l'aptitude de l'élève à résoudre un problème donné. Bien entendu, il faudrait multiplier de tels exemples d'évaluation qui pourraient être conçus à partir de situations interdisciplinaires ou de projets techniques (qu'il n'est pas possible de faire figurer dans un tel document car ils doivent être intégrés dans un projet d'équipe).

III. Situation de découverte

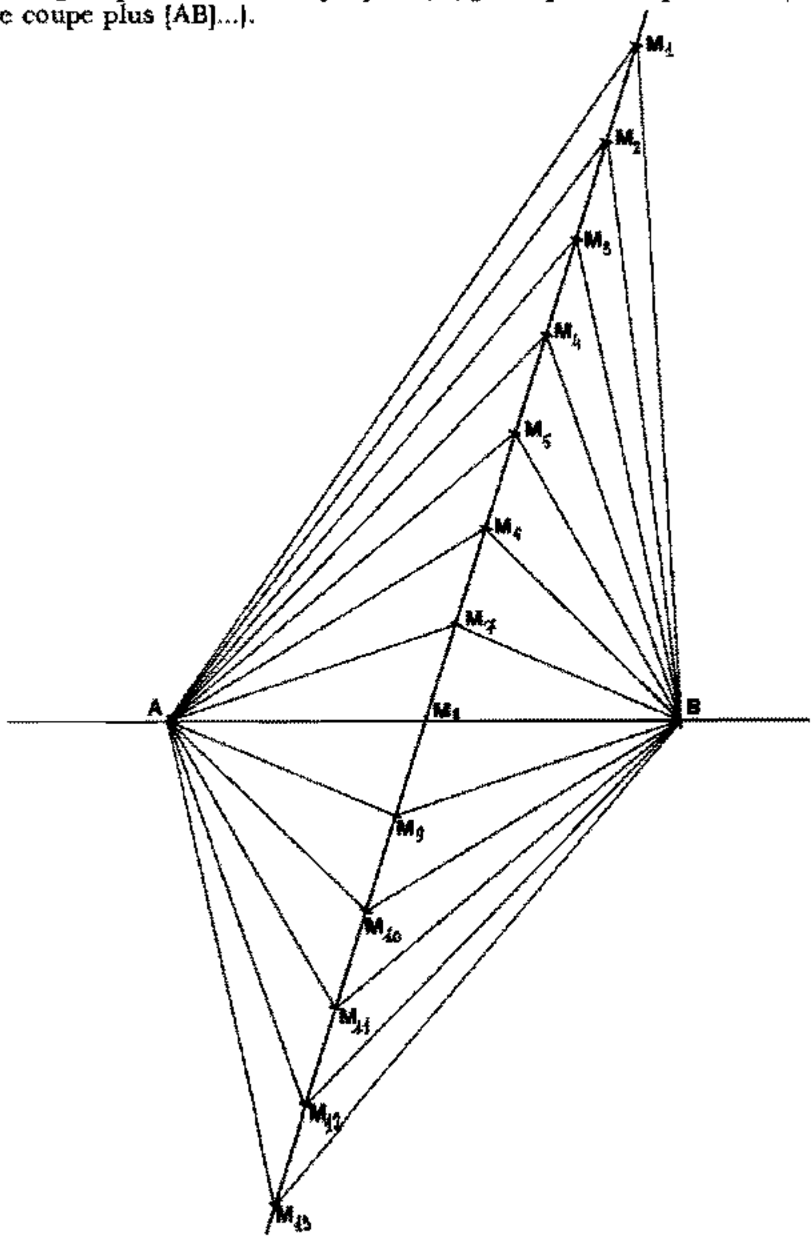
La situation est présentée de la façon suivante aux élèves :

"— Sur une feuille format A4 placer deux points A et B distants de 10 cm.
— Tracer une droite (D) passant par le milieu O de [AB].
— Placer sur la droite (D) des points Mi (l'indice i permet de repérer la position de chaque point M, on placera au moins une dizaine de points).
— Il s'agit de *comparer* les sommes AMi + BMi avec AB et les sommes $AMi^2 + BMi^2$ avec AB^2 et *d'écrire le résultat de la comparaison*.
— On tiendra compte du soin apporté aux constructions et aux mesures ainsi qu'à la méthode employée pour organiser les résultats".

Remarques :

— On pourrait après un tel travail demander aux élèves de rédiger un compte rendu de manipulation. (Capacité "rendre compte". En particulier pour inciter les élèves à séparer le nécessaire du contingent, le nécessaire du superflu).

— On peut se contenter d'un résultat immédiat, mais on peut aussi suggérer d'étudier les cas particuliers, [(D) ⊥ à [AB] ; (D) et (AB) confondus] ou faire varier certaines données (que se passe-t-il si (D) ne passe plus par le milieu de [AB] ; si (D) passe par A ou par B ; si (D) ne coupe plus [AB]...).



Un exemple de tableau de mesures (en cm)

i	OM_i	AM_i	BM_i		AM_i+BM_i	AB		$AM_i^2+BM_i^2$	AB^2	
1	14	17,1	12,8		29,9	10		456,25	100	
2	12	15,1	10,8		25,9	10		344,65	100	
3	10	13,1	9		22,1	10		252,61	100	
4	8	11,2	7,3		18,5	10		178,73	100	
5	6	9,4	5,8		15,2	10		122	100	
6	4	7,7	4,8		12,5	10		82,33	100	←
7	2	6,2	4,5		10,7	10		58,69	100	
8	0	5	5		10	10	←	50	100	
9	2	4,6	6,1		10,7	10		58,37	100	
10	4	5	7,6		12,6	10		82,76	100	
11	6	5,9	9,3		15,2	10		121,3	100	←
12	8	7,3	11,1		18,4	10		176,5	100	

Remarque : Les élèves sont conduits à effectuer de nombreuses fois le même type de calcul, ce qui est sans aucun doute le meilleur moyen de faire comprendre la nécessité d'organiser le traitement.

Par exemple avec une calculatrice à mémoire :

17,1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{STO}}$ 12,8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{\text{RCL}}$

ou

17,1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{M+}}$ 12,8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{MR}}$

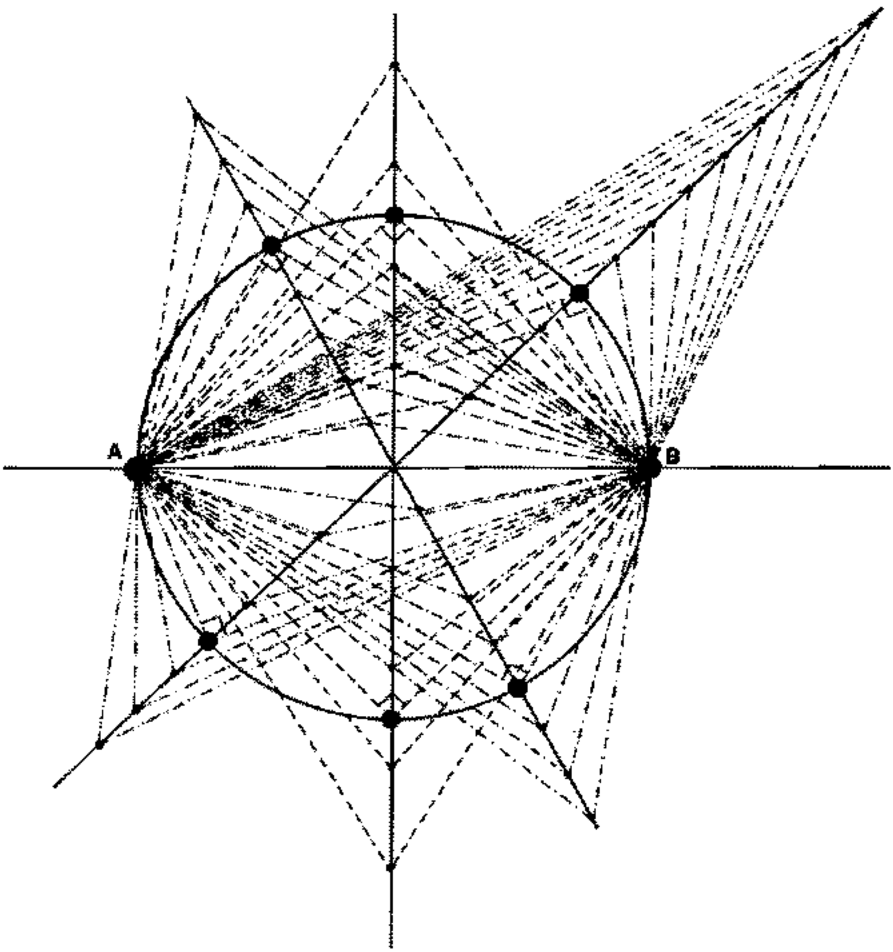
On retrouve dans la comparaison des colonnes (AMi + BMi) et (AB) l'inégalité triangulaire.

On met en évidence, à partir des résultats des deux dernières colonnes, trois intervalles, c'est-à-dire les points Mi tels que

$$AMi^2+BMi^2=AB^2$$

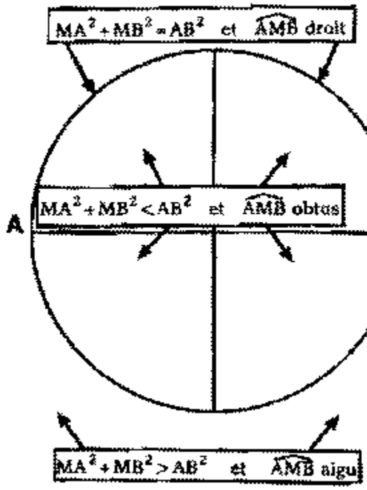
(s'ils existent, ce dont ne doutent pas les élèves !).

On peut procéder par essais en réduisant l'intervalle entourant la valeur cherchée. Dans l'exemple choisi, le résultat est immédiat puisque les points sont situés à 5 cm de 0.



Superposition au rétroprojecteur de travaux d'élèves.

Régionnement du plan.



On remarque bien sûr que les points Mi cherchés sont situés sur un cercle de centre O et de rayon 5 cm donc passant par A et B.

Remarque : La superposition de plusieurs figures réalisées sur plastique transparent fait apparaître par projection au rétroprojecteur la position des points situés sur différentes droites (D).

On peut conjecturer un régionnement du plan.

Extérieur du cercle	$MA^2+MB^2>AB^2$	$\hat{M}$ aigu
cercle	$MA^2+MB^2=AB^2$	$\hat{M}$ droit
Intérieur du cercle	$MA^2+MB^2<AB^2$	$\hat{M}$ obtus.

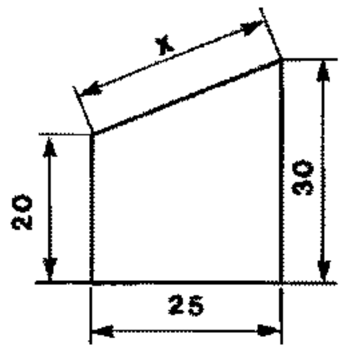
Il reste bien entendu à structurer les résultats et à compléter pour énoncer la propriété, éventuellement la démontrer, énoncer la propriété réciproque...

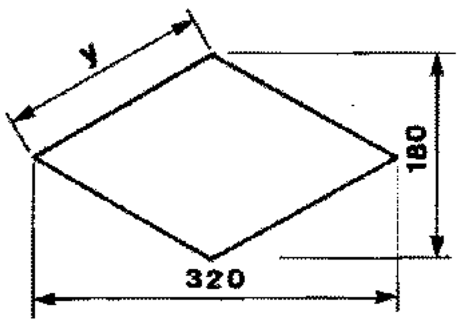
IV. Situations et exercices de maîtrise

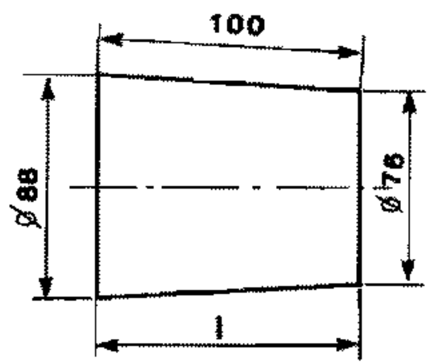
Il s'agissait de constituer une banque d'exercices permettant de développer de façon séparée les capacités.

1. Capacité ANALYSER

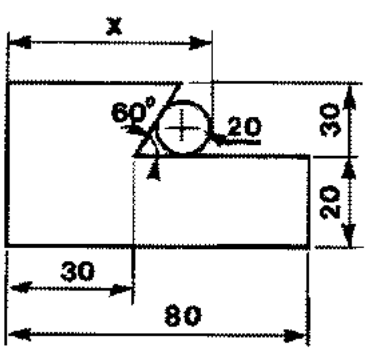
1.1. Tracer les triangles rectangles permettant de calculer les cotes inconnues.

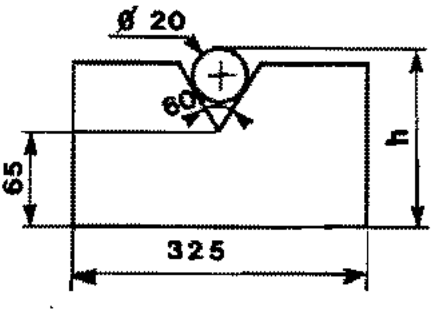




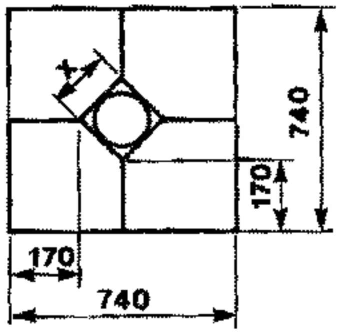


1.2. Tracer les triangles rectangles permettant de calculer la cote inconnue, les désigner, et indiquer, la décomposition de la cote cherchée à l'aide d'éléments connus ou que l'on peut calculer.





1.3.

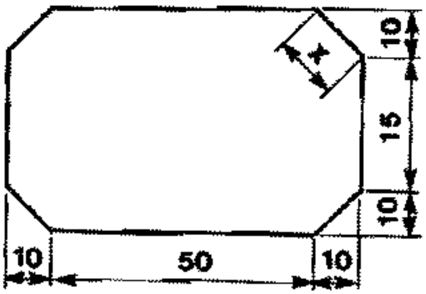


— Tracer un triangle rectangle permettant de calculer x.

— Indiquer les mesures des côtés connues et la mesure inconnue.

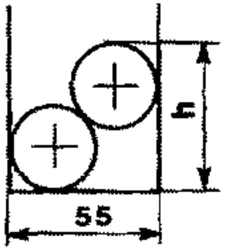
— Toutes les informations nécessaires à la résolution du problème sont-elles données ?
Pourquoi ?

1.4.



On borde le set de table ci-contre avec un biais. Tracer un triangle rectangle permettant de calculer x .

1.5.



Deux cyclindres de 40 mm de diamètre sont placés dans une rainure.
— Joindre les centres des cercles.
— Projeter orthogonalement les centres des cercles sur les bords et le fond de la rainure.
— Indiquer la méthode à suivre pour calculer h .

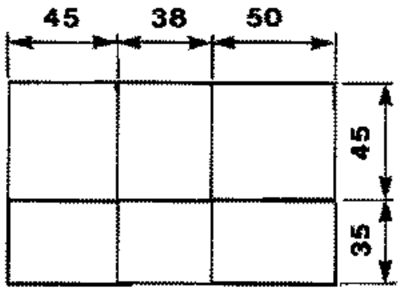
1.6. Un bateau a une largeur de 2,60 m au niveau du mât. Ce dernier a une hauteur de 7 m au-dessus du pont et est maintenu de chaque côté par un câble (hauban).

— *Faire un schéma* représentant la situation.
— Quelle est l'information manquante pour pouvoir calculer la longueur des haubans en utilisant le théorème de Pythagore ?

1.7. Une échelle de 6 m de longueur est appuyée contre un mur. Son pied est à 2,50 m du mur.

— On veut calculer la hauteur du point d'appui de l'échelle.
— Faire un schéma de la situation.
— Quelle information faut-il ajouter dans le texte pour pouvoir calculer la hauteur du point d'appui.

1.8.



La taille d'un téléviseur est caractérisée par la mesure de la diagonale de son écran (considéré comme un rectangle).
On veut encastrer un téléviseur de 56 cm dans l'un des éléments du meuble ci-contre.
— Représenter l'écran sachant que la largeur de celui-ci est de 42 cm.
— Faire apparaître un triangle rectangle sur lequel on reportera les dimensions.

1.8. "Un texte mystérieux".
Extrait de : *Les étoiles de compostelle*, Henri VINCENOT, Collection Folio p. 58.

"Trois hommes étaient en train de tripoter la corde à treize nœuds, cette fameuse corde divisée en douze espaces égaux. Ils en répartirent quatre d'un côté, trois d'un autre et rabattirent les cinq autres pour refermer la figure. Cela construisit un triangle dont les côtés étaient donc 3, 4, 5.

— Que font-ils ? demanda Jehan.
— Ils partagent l'espace en quatre parties égales, tu le vois bien, répondit négligemment le Prophète.

C'est ainsi que Jehan le TONNERE apprit que l'on partage l'espace en quatre avec 3, 4, 5.";

1) Lire le texte.
2) Représenter la corde à treize nœuds à l'aide d'un schéma.
3) Représenter le triangle en indiquant la place des nœuds.
4) Quelle est la nature de ce triangle ?
5) Quelle est l'utilisation de ce triangle (expliquer l'expression : "partager l'espace en quatre") ?
6) Réaliser avec une ficelle "la corde à treize nœuds et l'utiliser pour tracer un angle droit.
7) Trouver un autre triplet d'entiers p, q, r, tels que $p^2+q^2=r^2$.

NB : Les questions 6 et 7 correspondent à la capacité RÉALISER.

2. Capacité REALISER

Il suffit de reprendre chaque exercice proposé dans la capacité ANALYSER en demandant d'effectuer le calcul.

3. Capacité CRITIQUER et VALIDER

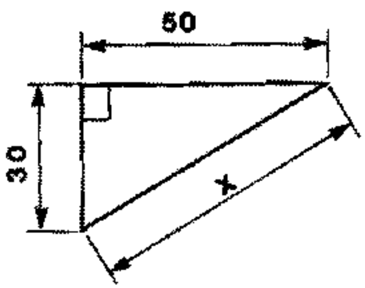
On peut reprendre chaque exercice proposé dans la capacité REALISER en ajoutant à chaque fois une question telle que :

— vérifier le résultat à l'aide d'un dessin à l'échelle
— vérifier le résultat à l'aide d'un théorème de Pythagore ou...

On peut également proposer des exercices spécifiques :

3.1. On donne le triangle rectangle ci-dessous dans lequel on veut calculer la longueur x .

a) Cocher la case qui convient :



	Vrai	Faux
x est inférieur à 30		
x est compris entre 30 et 50		
x est compris entre 50 et 80		
x est supérieur à 80		

b) Justifier chaque réponse.

3.2. a) Construire, quand c'est possible, les triangles suivants :

1) (ABC) tel que AB = 45 mm ; AC = 28 mm ; BC = 74 mm
2) (DEF) tel que DE = 20 mm ; DF = 29 mm ; EF = 21 mm
3) (GHI) tel que GH = 48 mm ; GI = 48 mm ; HI = 48 mm
4) (JKL) tel que JK = 32 mm ; JL = 29 mm ; KL = 11 mm

b) Dans chaque cas, indiquer si le triangle est rectangle et justifier la réponse.

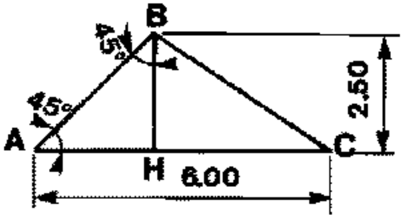
3.3. Les côtés de l'angle droit d'un rectangle ont pour mesures 48 m et 64 m.

On propose les valeurs suivantes pour l'hypoténuse :

55 m	85 m	80 m	200 m	75 cm

Quelles réponses sont invraisemblables ? Justifier.

3.4. Une ferme de charpente est représentée ci-dessous :

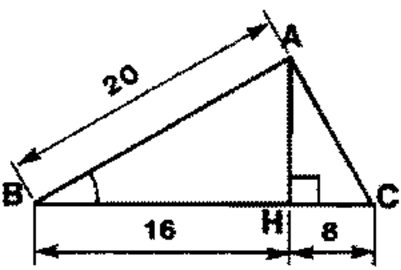


— Les cotes sont en mètres.

— La figure n'est pas à l'échelle.

Pour calculer BC, un élève a utilisé le théorème de Pythagore dans le triangle ABH puis dans le triangle ABC. Il a trouvé $AB^2 = 12,5$ puis $BC \approx 4,85$. La réponse est-elle juste ? Justifier.

3.5. Dans la figure ci-dessous, calculer AH en utilisant une méthode trigonométrique. Vérifier le résultat en utilisant le théorème de Pythagore..



4. Capacité RENDRE COMPTE

Dans la présentation d'un calcul, les exigences peuvent être les suivantes :

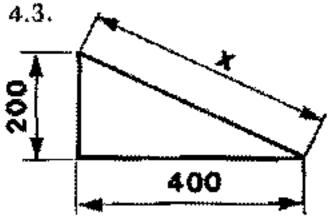
1) Traduire le texte donnée par une figure avec report de tous les éléments donnés ou à chercher.
2) Enoncer la propriété utilisée (directe ou réciproque).
3) Appliquer la propriété sous forme littérale.
4) Effectuer le calcul numérique en n'écrivant qu'une seule égalité par ligne.
5) Présenter le résultat avec les unités et en respectant la précision demandée.

4.1. Soit un triangle IJK rectangle en I. On donne $IJ = 17$ mm et $IK = 8$ mm.

— Faire la figure permettant de calculer JK.

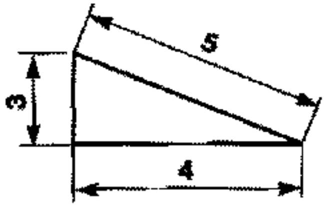
4.2. Soit un carré ABCD de côté 25 cm dont on se propose de calculer la diagonale. Faire la figure.

4.3.



Pour calculer x on écrit $x^2 = (200)^2 + (400)^2$.
Enoncer la propriété utilisée.

4.4.

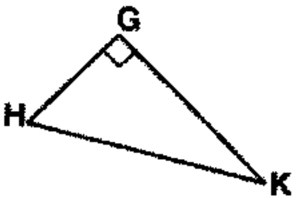


Puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$, le triangle ABC est rectangle.
Enoncer la propriété utilisée.

4.5. On a relevé dans un devoir l'énoncé suivant : "Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés de l'angle droit".

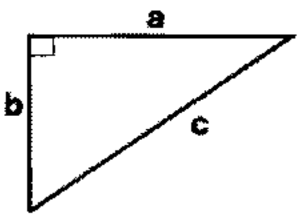
— Retrouver l'erreur et énoncer correctement la propriété.

4.6. Barrer les égalités qui ne correspondent pas à l'application de la propriété de Pythagore au triangle KGH.



— $KG + GH = KH$
— $KG^2 + GH^2 = KH$
— $GH^2 - GK^2 = KH^2$
— $GH^2 - GK^2 = KH^2$
— $KH^2 = KG^2 + GH^2$
— $KH = GK^2 + HG^2$
— $KH^2 = \sqrt{GH^2 + GK^2}$
— $KH = \sqrt{GH^2 + GK^2}$

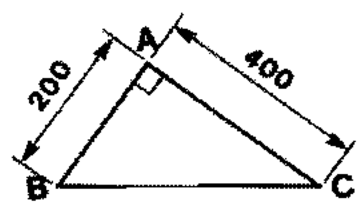
4.7. Même exercice :



— $a^2 = b^2 + c^2$
— $a^2 + b^2 = c^2$
— $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
— $b^2 - c^2 = -a^2$

4.8. Ecrire correctement le calcul suivant :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 200^2 + 400^2 = 40\ 000 + 160\ 000$$
$$= 200\ 000 = \sqrt{200\ 000} \approx 447{,}21 = BC$$



4.9. Même exercice :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$50^2 = 40^2 + AC^2$
$AC^2 = 50^2 - 40^2 = 2500 - 1600 = 9003\sqrt{900} = 30 = AC$

4.10. Soit un triangle ABC rectangle en A. On donne AB = 60 cm et AC = 50 cm. On doit calculer BC au mm près. On lit sur l'affichage de la calculatrice : 78.102497.

parmi les résultats suivants, cocher ceux qui conviennent :

BC = 78,1 cm	
BC = 7,81	
BC = 781 mm	
BC = 78,1 cm	
BC ≈ 781 mm	
BC = 78,11 cm	

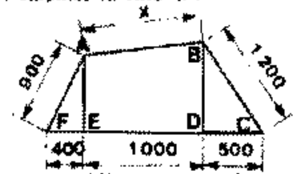
4.11. Reprendre l'exercice 1.10. (la corde à treize nœuds).

La propriété de Pythagore est-elle vérifiée quelle que soit la longueur de la ficelle ?
— Justifier la réponse.

On veut implanter une maison rectangulaire (donc tracer des angles droits) de 17 m de longueur et de 8 m de largeur.
— Comparer différents moyens utilisables pour réaliser ce travail.

Exemple de Monsieur GIRAUD, Professeur au LP de Bolbec

FICHE D'ÉVALUATION DE :

CAPACITES	OBJECTIFS	TACHES PROPOSEES	CRITERES DE REUSSITE	EVALUATION
		On réalise dans une feuille de tôle, le découpage d'une plaque de la forme suivante : *Problème* : calculer la cote x. 		
ANALYSER S'INFORMER — Trouver l'information — Mémoriser	— Sélectionner des données	Pour rédiger ce problème, on vous demande d'effectuer, pour chaque cote inconnue, les activités : 1) Identifier la cote inconnue à l'aide d'une phrase.	Aucune erreur	1 point
	— Connaître la propriété de Pythagore	2) Tracer une figure.	Aucune erreur	1 point
REALISER RENDRE COMPTE — Utiliser un vocabulaire adapté	— Calculer la mesure d'un triangle rectangle	3) Enoncer la formule mathématique qui vous permet d'effectuer votre calcul	Aucune erreur dans la formule mathématique	3 points
	— Rédiger la solution d'un problème	4) Calculer la cote inconnue.	au mm près Rédaction répondant aux exigences 1, 2, 3, 4, 5.	2×1,5 points 2 points pour x (1 point en moins par oubli)
CRITIQUER VALIDER — Argumenter — Argumenter une réponse — S'auto évaluer	— Utiliser une propriété ou une construction pour argumenter ou vérifier une réponse	5) Vérifier la cote x à l'aide d'un calcul ou d'une construction à l'échelle	Formule adéquate Vérification pertinente (traits de construction apparents)	1,5 points (3×0,5) 3,5 points