échanges

sur la nécessité de la réciproque dans les problèmes de lieux géométriques

par R. Barra et P. Chevrier
IREM de Poitiers

Très souvent pour résoudre des problèmes de lieux on utilise une transformation usuelle ; et dans ce cas très souvent aussi la réciproque manque dans les corrigés proposés au lecteur alors qu'elle est nécessaire.

Déterminer un lieu géométrique c'est déterminer un ensemble image ; en effet, à chaque point M d'un ensemble E on associe par un procédé bien défini, en général une construction, un point N et un seul. Si l'on note f $M \to N$, chercher le lieu de N c'est chercher f(E).

Lorsque pour résoudre on utilise une transformation usuelle g deux cas peuvent se produire :

- ou bien le rédacteur démontre que pour tout M de E, g(M) = f(M) et alors le lieu est g(E) ; en général, la connaissance de g(E) résulte d'un théorème du cours, le problème est alors terminé, point n'est besoin ici de réciproque ;
- ou bien le rédacteur démontre seulement, et c'est son droit et c'est ce qu'il fait le plus souvent, car l'équivalence est rarement immédiate, que pour tout M de E l'égalité N = f(M) implique N = g(M). Dans ce cas, il peut seulement conclure que le lieu cherché est inclus dans g(E), et même si g(E) est bien connu, le problème réciproque doit se poser en principe.

Mais, là encore, on a $f(E) = g(E)$; en effet, soit N dans $g(E)$ et M tel que $g(M) = N$; si $N' = f(M)$, d'après ce qui précède on a aussi $N' = g(M)$, donc $N' = N$ puisque g est bijective.

Mais à notre connaissance, jamais on n'explique cela aux élèves, jamais on ne dit pourquoi dans ce cas on a le droit d'escamoter la réciproque ; mais on le prend. Faut-il expliquer tout cela ? Si on ne le fait pas, il serait préférable de parler du problème réciproque lorsqu'il se pose.

Voici un exemple

On donne un point I de coordonnées (0,1) et le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2. M est un point de $\mathcal{C}$; on considère les deux points B et C du cercle de centre O de rayon OM tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}$; et on construit le point N tel que MBNC soit un losange. Quel est le lieu du point N lorsque M décrit $\mathcal{C}$? (extrait d'un exercice de Baccalauréat 1988).

La solution écrite dit : on a $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OM}$; N est donc l'homothétique de M dans l'homothétie de centre O de rapport -2 ; le lieu est *donc* le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par cette homothétie.

Le dernier donc est abusif ; le rédacteur a seulement montré que pour tout M de E l'égalité $N = f(M)$ implique $N = g(M)$. Un minimum de rigueur oblige à poser la réciproque : "si N est sur $\mathcal{C}'$, N est-il le sommet d'un losange MBNC tel que... ?" Alors où on énonce le "théorème" ci-dessus, où on démontre dans le cas particulier.

Conclusion

Si l'on juge que le problème des réciproques est trop difficile, ou trop évident, ou trop... alors qu'on ne le pose pas. A la place du lieu géométrique, demander seulement : "sur quelle ligne se déplace le point N tel que... ?"