## didactique

# l'évaluation du savoir mathématique

Antoine Bodin IREM de Besançon

> Ce texte est la version française d'une communication faite au 6° congrès international sur l'enseignement des mathématiques (I.C.M.E.6) sous le titre : Evaluation in mathematics ; the quality of students' knowledge.

> > Budapest, 1er août 1988

#### AVERTISSEMENT ET RESUME

Ce texte ayant été écrit pour le 6ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques présente la problématique de l'évaluation en mathématiques en termes très généraux. Il nous à semblé intéressant de le publier tel quel, sans chercher à l'adapter spécialement aux lecteurs du bulletin. Bien qu'empruntant certains exemples aux opérations d'évaluation des programmes actuellement menées par l'APMEP, il ne cherche pas à rendre compte de ces opérations pour lesquelles il convient, pour l'instant, de se reporter aux brochures EVAPM6 et EVAPM5. Toutefois, cet article constitue une introduction aux démarches de pensée et aux méthodes qui sont mises en ocuvre dans nos évaluations des programmes. Il constitue de ce fait une introduction aux articles de synthèse, concernant les évaluations de l'APMEP, qui seront ultérieurement proposées au bulletin.

Partis, il y a une dizaine d'années, d'une conception béhavioriste et technicienne (il s'agissait d'abord de fournir des instruments utilisables par les enseignants), nous avons peu à peu été conduits à une mise en question du savoir, et donc à être particulièrement attentifs aux significations que les comportements observés pouvaient prendre, tant par rapport au Savoir (savant) que par rapport à la construction du savoir personnel de l'étève.

Cette évolution s'est faite en partie sous la pression des observations que nous avons faites directement, mais a de façon évidente, été considérablement influencée par le développement des recherches en didactique des mathématiques. L'exposé cherche, en particulier, à préciser le cadre didactique qui est à la base de notre problématique.

Une lecture un peu rapide de l'article pourrait conduire les collègues pressés à conclure : "Les conditions d'une expertise rigoureuse du savoir des élèves ne sont pas prêtes d'être réunies.....il est temps de revenir aux méthodes qui ont fait leur preuve...". Bien entendu, ce n'est pas notre sentiment. Nous sommes simplement arrenés à relativiser les évaluations que nous pratiquons, à ne pas nous satisfaire d'une lecture au premier degré des résultats que nous enregistrons et à chercher à relier les observations que nous pouvons faire. Nos travaux actuels dans le cadre du "suivi scientifique" aussi bien que notre implication dans les opérations d'évaluation des programmes menée par l'APMEP montre que notre questionnement est aussi à l'origine d'un éclaircissement de la problématique qui nous permet de progresser avec confiance et efficacité.

Les mors clé sont : SENS (signification) ; PERTINENCE; FIDÉLITÉ; VALIDITÉ; MODÉLISATION DU SAVOIR; COMPÉTENCE; FORMULATION DES QUESTIONS; APPRENTISSAGE.

Le "NOUS" utilisé dans cette présentation n'est pas seulement une clause de style. Il englobe tous ceux qui à l'APMEP, à l'IREM de BESANÇON, dans les colloques et séminaires INTER-IREM etc...ont accompagné et stimulé cette réflexion. En ce qui concerne l'APMEP il s'agit d'abord des participants de la commission évaluation puis maintenant des 25 membres de l'équipe qui a pris en charge les opérations d'évaluation.

#### Introduction

De quoi peut-on parler, à propos d'évaluation, dans un congrès sur l'enseignement des mathématiques, sinon d'évaluation du savoir?

En réalité, à la lecture des travaux sur l'évaluation, il est évident que pour la plupart d'entre eux, le savoir n'est pas la préoccupation principale du chercheur, et nous allons voir qu'il y a de bonnes raisons à cela.

Dans le but de centrer notre attention sur la question de l'évaluation de la qualité du savoir mathématique des élèves, il nous a semblé indispensable de commencer par replacer cette question par rapport à la question plus générale de l'évaluation, et à terme, de pouvoir mieux faire la part de ce qui relève de notre problématique et de ce qui n'en relève pas. Pour cela, il nous faudra en particulier expliciter aussi bien nos conceptions de l'évaluation, que celles concernant le savoir.

Dans ce texte, nous utilisons le terme de savoir dans un sens très général. Nous parlerons aussi bien du "savoir nager" que du "savoir parler une langue étrangère" ou encore du "savoir calculer" étant entendu que telles quelles, ces expressions n'ont guère de sens et nous préciserons à chaque fois la signification que nous leur attribuons.

#### Le contexte

Précisons tout d'abord que, bien que nombreuses et variées, nos observations ont été faites dans un système particulier : le système français des collèges et des lycées d'enseignement général où aucun examen n'intervient pour la répartition des élèves dans les différentes filières. De l'entrée en maternelle jusqu'à la fin du lycée, la règle est celle du contrôle continu par l'enseignant de la classe, lequel n'a en fait de comptes à rendre à personne, il est ainsi libre de choisir à son gré le rythme, les contenus et les critères de ses évaluations. Bien sûr, cette liberté formelle est considérablement limitée par la pression sociale et par le poids des habitudes. L'utilisation de notes pour traduire l'évaluation est quasi-systématique aussi bien pour l'évaluation des productions des élèves que pour l'évaluation de leur niveau global. Le passage de l'un à l'autre se faisant en calculant des moyennes (la moyenne des valeurs des productions devient par définition la valeur du producteur).

Bien que dans les lycées, les sections scientifiques à dominantes mathématique et physique soient les plus prestigieuses (pour les parents et pour les enseignants), on éprouve depuis quelques années des difficultés à y orienter un nombre d'élèves suffisant, et plus encore à en ouvrir de nouvelles, conformément aux besoins actuels de la société. Soit que les enseignants jugent que les élèves n'ont pas un niveau suffisant pour avoir accès à ces sections, soit que les élèves s'en détournent eux-mêmes par manque d'intérêt ou par crainte des difficultés.

#### L'accès au savoir : enjeu de l'évaluation

Nous nous intéressons donc au savoir ou plus exactement à ce qu'il est possible de dire de fondé sur le savoir d'une personne ou d'un groupe, relativement à un domaine particulier de connaissance. Il serait peut-être préférable pour une recherche de pouvoir dire que cet intérêt est tout à fait gratuit et que seul nous intéresse de savoir pour savoir, mais il n'est pas possible de cacher que l'un des moteurs de notre recherche est notre intérêt pour la diffusion du Savoir. Venant de voir que cette diffusion est limitée pour une part importante par l'idée que les enseignants se font des possibilités de leurs élèves, ainsi que par les idées que les élèves se font de leurs capacités et de leurs goûts, on comprendra mieux notre intérêt pour une analyse globale du fonctionnement de l'évaluation. En particulier, et sans vouloir restreindre la liberté de choix des personnes, on ne peut ignorer que les idées et les goûts des élèves sont grandement influencées par les jugements des enseignants.

#### Remarques préliminaires

Les effectifs d'élèves que nous avons observés au cours de nos recherches à l'IREM de Besançon varient de quelques centaines d'élèves à quelques milliers. Par ailleurs, avec l'A.P.M.E.P., nous avons entrepris

une évaluation des programmes du collège. Cette évaluation a porté sur 1000 classes de sixième (i) et 2000 classes de cinquième. Dans ce dernier cas, nous échantillonnons sur l'ensemble des élèves ayant participé à l'évaluation. La plupart des questions et des résultats utilisés pour illustrer ce texte sont extraits de cette dernière étude. Le fait que tous les élèves ne passent pas les mêmes épreuves (la population ayant passé deux épreuves X et Y est une sous population de celle ayant passé X), explique certaines différences entre nos pourcentages de réussite à un item donné et le pourcentage que l'on retrouve dans les tableaux croisés.

### I. Les limites d'une démarche d'évaluation centrée sur les objectifs

Pendant dix années de recherche et de travail avec des enseignants, nous avons largement utilisé les techniques d'identification, de formulation et d'opérationnalisation des objectifs. En particulier, ayant opérationnalisé les objectifs de l'enseignement des mathématiques des quatre années du collège (2), nous avons pu les communiquer de façon relativement univoque et étudier leur pertinence ainsi que la validité des opérationnalisations produites. Nous avons de même pu observer et analyser les résultats de populations importantes tout en les rapportant à des objectifs explicites.

La technologie des objectifs nous a donc beaucoup apporté, nous apporte encore, et il n'est pas question de la rejeter en bloc. Toutefois, peu à peu, de nouvelles questions sont apparues qui pour la plupart concernaient plus ou moins directement le sens même du savoir.

Voici quelques unes de nos observations :

### L'opérationnalisation des objectifs peut favoriser le conditionnement

Les objectifs décrivent souvent des savoir-faire qui peuvent être ou non associés à un savoir réel.

Par exemple, considérons l'objectif suivant :

être capable de résoudre une équation du type ax+b=cx+d.

Nous avons pu observer que beaucoup d'élèves qui réussissaient la question suivante

Question 1: résoudre l'équation 7x - 3 = 13x + 15

se trouvaient dans l'incapacité de répondre à la question 2 :

<sup>(1)</sup> Evaluation du programme de Sixième, 1987, A.P.M.E.P. 26, rue Duméril, 75013 Paris.

<sup>(2)</sup> BODIN A. et A11, Objectifs et Evaluation, IRBM de Besançon, 1983.

#### **Question 2:** le nombre 10 est-il une solution de l'équation 7x - 3 = 13x + 15?

Sans doute peut-on penser que l'enseignement avait davantage insisté sur la maîtrise du savoir-faire que sur sa signification. Il est d'ailleurs possible d'associer des exemples semblables à la plupart des objectifs et nous avons bien conscience d'effectuer un changement de registre (mais pas toujours un changement de niveau) en passant de la question 1 à la question 2. Ce que nous voulons dire, c'est simplement que, si l'on n'y prend pas garde, une centration trop exclusive sur les objectifs peut favoriser les automatismes au détriment de la compréhension.

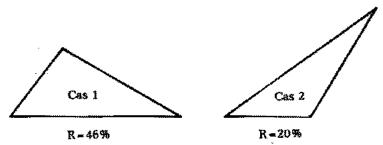
Dans le sens que nous donnons au mot savoir, il doit être clair qu'un savoir-faire, ou un savoir-dire, non relié à un réseau de signification, est une sorte de conditionnement et peut difficilement être considéré comme un élément de savoir réel.

#### L'opérationnalisation des objectifs peut masquer la réalité du savoir de l'élève

Voici un objectif :

A la fin de l'année, un triangle lui étant donné, dessiné sur une feuille de papier, l'élève doit être capable d'effectuer les mesures nécessaires et de calculer une approximation de l'aire de ce triangle.

On ne peut qu'être sensible au fait que selon que l'on aura utilisé l'un ou l'autre des triangles ci-dessous (il s'agit de réductions), on sera amené à déclarer que près de la moitié des enfants ont atteint l'objectif ou que seulement un enfant sur cinq l'a atteint.



Dans chaque cas, R désigne le taux de réussite.

Ici, la reconnaissance du savoir de l'élève va dépendre pour une part importante de l'opérationnalisation choisie.

Voici un autre exemple :

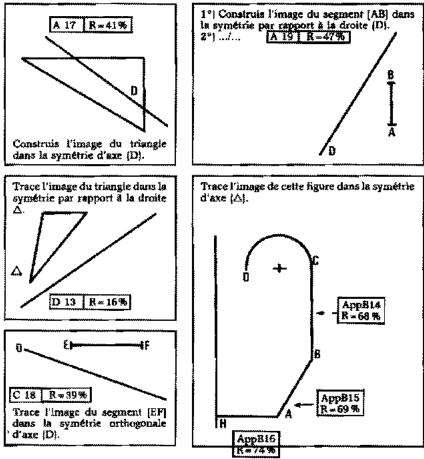
Savoir tracer l'image d'un segment dans la symétrie par rapport à une droite.

Suivant l'orientation relative du segment et de la droite et l'inclusion éventuelle du segment dans une figure plus complexe, nous obtenons en fin de sixième des taux de réussite variant de 39% à 74% dans un sens d'ailleurs inattendu puisque ce sont les figures les plus complexes (en ce sens qu'il est possible de les décomposer en éléments considérés comme plus simples) qui sont le mieux réussies.

Pour chaque item, on lira dans le cadre gris :

à gauche : le code de l'item

à droite : le pourcentage de réussite.

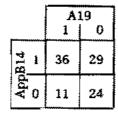


On le voit les taux de réussite varient dans le sens contraîre de ce que l'analyse de la tâche laissait prévoir. La figure la plus complexe (mais l'axe est vertical!) est, de loin, la mieux réussie. Les didacticiens identifierons lei l'influence de variable didactiques qu'ils connaissent bien, mais outre que ces phénomènes demandent à être intégrés à nos conceptions du savoir, il faut bien admettre que l'enseignant-évaluateur en use le plus souvent en aveugle.

Voici quelques tableaux croisant les réussites-échecs de certaines des questions ci-dessus.

1 indique la réussite, 0 indique l'échec. Les autres nombres sont des pourcentages.

		A17	
		1	0
0	1	30	17
Ai	0	11	42



	C18	
	1	0
AppB16	32	43
App.	09	16

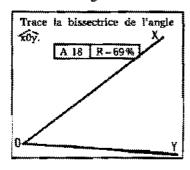
On remarquera par exemple que près de la moitié des élèves qui réussissent l'item AppB14 échouent à A19.

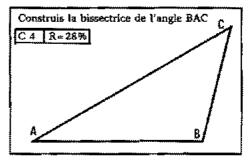
#### L'opérationnalisation des objectifs peut masquer la signification du savoir

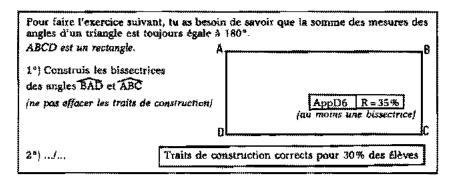
Reprenons l'exemple de l'aire du triangle. Rien ne nous assure qu'un élève qui aurait su calculer l'aire des triangles dans les deux cas ci-dessus serait encore capable d'ailer réeliement mesurer un terrain triangulaire et de calculer son aire. Un savoir est toujours repéré dans une situation particulière et n'est pas nécessairement mobilisable dans d'autres situations.

Pour nous, un savoir particulier doit être repéré par rapport à la classe de problèmes qu'il permet de résoudre.

Voici un autre exemple concernant la capacité à tracer la bissectrice d'un angle en fin de cinquième.







Quels sont les élèves qui ont atteint l'objectif?

On pourrait bien sûr déclarer cet objectif atteint par les seuls élèves qui réussissent dans les trois cas, mais, d'une part, il serait facile de trouver un quatrième cas qui déqualifierait une bonne partie d'entre eux, d'autre part, il convient de se demander pour quelle raison le savoir des autres devrait être ignoré?

Les tableaux croisés ci-dessous montrent que si AppD6 implique A18, 60% des élèves qui réussissent à AppD6 échouent à C4, tandis que 30% des élèves qui réussissent à C4 échouent à AppD6.

	A18	
	1	0
9 1	38	00
Aps.	31	31

	C4	
	1	0
<u>ජූ</u> 1	17	26
App.	07	50

Statistiquement, C4 et AppD6 ne sont pas indépendants et c'est la réussite à C4 qui permet le mieux de "prédire" la réussite à AppD6. Dans ce texte, nous n'avons pas la place de développer des arguments statistiques. Disons simplement que très souvent le comportement de 20 à 30% des élèves est mal "prédit" par les statistiques d'ensemble. Or, dans une classe, cela représente de 6 à 12 élèves, peut-être justement ceux qu'il faudrait prendre en compte de manière particulière.

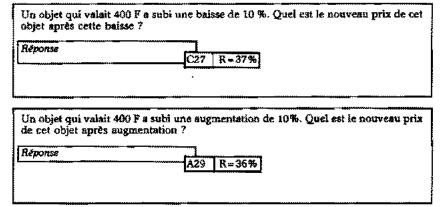
#### Les comportements des élèves ne respectent ni les taxonomies d'objectifs ni les analyses a priori de la difficulté des questions

L'utilisation des taxonomies donne au moins la garantie d'assurer une certaine variété dans les difficultés des questions posées. À condition de rester à l'intérieur d'un même domaine de connaissance, de tenir compte des pratiques enseignantes et, à condition que l'analyse de la tâche confirme la hiérarchisation des questions, les résultats enregistrés au niveau collectif sont habituellement conformes aux taxonomies. Il n'en va plus du tout de même en ce qui concerne les comportements individuels. Ainsi dans une étude que nous avons faite au niveau de la classe de seconde (3) sur les connaissances des élèves dans le domaine vectoriel, nous avons comparé les résultats obtenus à une épreuve portant sur les micro-objectifs (épreuve EM) aux résultats à une épreuve d'argumentation-déduction (épreuve ET); les questions de EM se situent toutes aux niveaux inférieurs des taxonomies tandis que les questions de ET se situent aux niveaux supérieurs. Le coefficient de corrélation linéaire entre les deux scores est de 0,42, ce qui laisse évidemment de la place pour une grande variété de comportements individuels : environ le quart des élèves obtiennent à ET des résultats nettement supérieurs à ce que leur score à EM pouvait laisser espérer.

Dans les évaluations de programmes de l'A.P.M.E.P., chaque élève passe une première épreuve construite sur les "compétences exigibles" et une autre "complémentaire" de niveau taxonomique plus élevé. Dans ce cas aussi, le quart des élèves, environ, réussit mieux la seconde épreuve que la première.

D'une façon générale, il est fréquent de voir un élève réussir à une question Y et échouer à une question X alors même que l'analyse de la tâche subordonne Y à X.

Par exemple, les questions AppA7 et C27 présentées cì-dessous ont été passées par les mêmes élèves en fin de sixième. La tâche AppA7 est plus complexe, et compte tenu de l'enseignement donné, d'un niveau taxonomique plus élevé que la tâche relative à C27. Pourtant, 31% des élèves ayant échoué à C27 ont réussi à AppA7, tandis que 30% de ceux qui ont réussi C27 ont échoué à AppA7.



(3) BODIN A., Une recherche sur l'évaluation en classe de Seconde : les vecteurs, IRBM de Besançon, 1988 (à paraître).

Le prix de vente affiché d'une volture est 45.000 F. Le marchand fait une réduction de 5% sur ce prix.

Quel est le nouveau prix de cette voiture?

écris la réponse dans cette case AppA7 | R=38%

Finalement, le client doit encore ajouter des taxes qui augmentent le prix de 33 %.

Combien le client doit-il payer en tout ?

Ecris la réponse dans cette case

AppA8 R=25%

Les tableaux croisés indiquent en particulier que 35% des élèves ayant réussi à AppA7 ont échoué à C27!

		AppA7	
		1	0
AppA8	1	24	01
	0	14	61

		A29 1   0	
AppA7	1	20	10
	0	18	52

	C27	
	1	0
1 Y	28	13
ddy	12	47

		C27	
		1	0
pA8	1	22	07
ddy	0	18	53

la première solution qui vient à l'esprit pour limiter les effets des observations ci-dessus est de ne produire des objectifs qu'en les accompagnant de leur opérationnalisation, laquelle serait alors considérée comme unique. C'est ce que nous avons fait assez longtemps et cette façon de faire a bien des avantages : facilité de communication entre les enseignants, entre les enseignants et leurs élèves, univocité, possibilité de décider de ce qui peut être exigé des élèves à chaque niveau scolaire... Cependant, si l'on peut éventuellement admettre que, par exemple, "l'intelligence c'est ce que mesure les tests... d'intelligence", il serait pour le moins hasardeux et inquiétant de déclarer : "la connaissance de la symétrie est ce que mesure telle épreuve sur la symétrie". On vient de le voir il suffirait alors de changer quelques questions, ou même de modifier l'ordre des questions ou la durée de l'épreuve pour que le savoir se transforme en ignorance et réciproque-

ment (4). Ce problème est celui de la fidélité de l'évaluation, étendue à l'ensemble des épreuves qu'il est possible de construire pour évaluer un savoir particulier.

#### L'évaluation du savoir manque de fidélité

Il y a certainement des épreuves plus fidèles que d'autres, mais on sait bien que lorsqu'on fait passer la même épreuve à un même élève quelque temps après une première passation, on ne sait jamais bien ce que l'on va obtenir. Même sans nouvel apprentissage, le temps a fait son œuvre, le savoir de l'élève s'est modifié, s'est restructuré, des savoirs formels ont été oubliés tandis que des significations nouvelles sont apparues. Bref, si l'épreuve est apparemment la même, les élèves ne sont déjà plus les mêmes. Il est même abusif de dire que l'épreuve est la même, car une épreuve n'est pas seulement constituée d'un morceau de papier imprimé, elle comprend un certain nombre de variables de situation qui plus ou moins à l'insu de l'évaluateur exercent une influence importante.

On peut encore considérer une épreuve comme étant une opérationnalisation possible d'un choix d'objectifs pris dans un ensemble plus ou moins vaste. On vient de voir qu'en conservant la même épreuve, la constance des résultats n'était pas assurée; si, de plus on modifie les opérationnalisations ou le choix des objectifs, le comportement apparent des élèves apparaît alors comme totalement imprévisible.

Ce qui n'est pas fidèle, c'est donc le jugement que l'on peut porter sur le savoir d'un élève en utilisant une ou plusieurs épreuves particulières.

### Lorsqu'ils évaluent, le savoir n'est pas la préoccupation essentielle des enseignants

Ce qui précède est-il connu des enseignants ?

On pourrait répondre : oui, dans une certaine mesure, lorsqu'ils n'évaluent pas, non, lorsqu'ils évaluent.

Les sociologues identifieront sans doute là un conflit de but [5]. Si le comportement des enseignants ne semble pas prendre en compte ces informations, ce n'est pas parce qu'ils ne savent pas, c'est plutôt parce que le but qu'ils poursuivent implicitement par l'évaluation n'est pas lié au savoir de façon aussi étroite que l'on pouvait le penser. Sans doute, comme formateur, le savoir [tel qu'il le conçoit] et son développement

<sup>(4)</sup> BODIN A., Problèmes de l'évaluation des savoirs mathématiques, Petit X. n° 7/1985, IREM de Granoble.

<sup>(5)</sup> RANJARD P., Les enseignants persécutés, Editions Robert Jauze, 1984.

chez ses élèves est le souci principal de l'enseignant. Par contre comme évaluateur, il répond d'abord à une demande sociale qui a peu de rapport avec le savoir, il négocie ensuite le fonctionnement de sa classe [6], "il régule l'anxiété de sa classe" (RANJARD P. ouvrage cité), il assure ou préserve son pouvoir... Bref, les raisons profondes de l'évaluation, qui bien souvent échappent à l'enseignant, ne se réduisent pas, et de loin, à la nécessité de connaître l'état du savoir des élèves.

Comme enseignants puis comme formateurs et chercheurs, nous avons cherché à nous munir et à munir les professeurs d'indicateurs fiables permettant de situer le savoir des élèves. Les exemples disséminés dans cet article montrent que d'une certaine façon nous y sommes parvenus, mais on peut se demander si ces indications sont utilisables par les enseignants ?

Nous avons d'abord mis l'accent sur l'évaluation formative avant de réaliser qu'une véritable évaluation formative, c'est-à-dire au service des élèves et de leurs apprentissages, ne pouvait pas être recherchée au niveau des techniques, mais plutôt au niveau des projets; qu'elle supposait une intention de l'enseignant qui soit en rupture avec la description que nous venons de faire et qu'elle suppose de plus une compréhension et une adhésion des élèves et, pour une moindre part, des parents et de l'administration. Il faut bien admettre que ces conditions sont rarement réunies et que ce qui est parfois appelé dans les classes "évaluation formative" devrait le plus souvent être appelé "évaluation sommative permanente". Les indicateurs que nous avons déjà pu proposer sont ainsi bien souvent utilisés pour participer à l'aspect sélectif de l'évaluation plutôt que pour faciliter les apprentissages.

#### II. L'évaluation - une problématique complexe

C'est l'évaluation des élèves qui assure la régulation des flux. C'est elle qui, pour une part, justifie le fait qu'en France, moins de 70% d'une classe d'âge accède à la classe de quatrième de collège (officiellement appelé "le collège pour tous" 1, qu'à peine plus de 40% d'une classe d'âge accède à la classe de seconde des lycées et qu'enfin 38% d'une classe d'âge obtienne un baccalauréat. Bien sûr, cette évaluation n'est pas le fait des seuls enseignants de mathématiques; les mathématiques y prennent une part qui est sans doute moindre que ce qui est parfois affirmé, mais qui reste néanmoins importante.

De nombreuses études montrent que, toutes disciplines confondues [7], les résultats scolaires des élèves n'expliquent que pour une part leur devenir scolaire.

<sup>(6)</sup> CHEVALLARD Y., Pour une diductique de l'évoluation, IREM de Marseille, 1986.

<sup>(7)</sup> Bn particulier: M. DURU et A. MINGAT, De l'orientation en fin de cinquième au fonctionnement du collège, IREDU-CNRS, 1985-88.

A résultats scolaires donnés, le devenir des élèves dépend de leur milieu socio-culturel, mais aussi de leur âge, de l'établissement scolaire dans lequel ils se trouvent, de leur groupe classe etc... On peut considérer que les résultats scolaires des élèves n'expliquent que pour moitié leur orientation.

#### Le savoir des élèves n'explique que pour une part leurs résultats scolaires

Dans l'étude citée ci-dessus les résultats scolaires des élèves de cinquième de 17 collèges ont été comparés à leurs résultats à une même batterie de tests de connaissance. Dans d'autres études on a utilisé soit des épreuves de connaissances, soit des épreuves que nous appellerions d''instrumentation mentale". Bien entendu, il n'est pas possible de considérer a priori que de telles "mesures" externes rendraient mieux compte du savoir des élèves que ne le font les résultats donnés par les professeurs. On ne peut que constater que, quelles que soient les mêthodes d'approche du savoir des élèves, indépendantes des évaluations des enseignants, on ne parvient que rarement à expliquer à plus de 50% les résultats scolaires qu'ils obtiennent.

Des deux remarques précédentes, on peut déduire que :

### Les possibilités d'accès ultérieurs au savoir ne sont, que pour une part, déterminées par les savoirs actuels

Il ne suffirait donc pas de favoriser un meilleur repérage du savoir des élèves pour améliorer leur formation scientifique, il faudrait encore que ce savoir soit pris en compte de façon positive.

Pour ne pas risquer de perdre de vue la complexité du problème et la multiplicité des enjeux, il nous semble utile de placer notre réflexion dans un cadre aussi général que possible.

#### Il est nécessaire de replacer l'évaluation dans son cadre didactique spécifique

Le plus souvent, les théories et discours sur l'évaluation évitent de prendre en compte la spécificité des savoirs en jeu. Pourtant, lorsque l'évaluation a pour ambition de dire quelque chose sur le savoir d'une personne ou d'un groupe, et, si l'on admet que ce savoir ne peut qu'être inféré à partir des indices recueillis, que de plus il possède sa propre dynamique, il devient vite évident que les réflexions et méthodologies générales sont insuffisantes.

Le développement actuel de la didactique des mathématiques, les concepts et méthodes qu'elle propose, rendent à la fois inévitable et en partie possible, la prise en compte du savoir de façon pertinente, du moins lorsque le savoir est réellement un enjeu.

Partant d'une approche techniciste de l'évaluation, nous avons été largement influencés par les travaux de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques. Nous ne citerons ici que trois d'entre eux pour les éclairages complémentaires qu'ils nous ont apportés :

- G. VERGNAUD pour ses travaux sur les domaines conceptuels et les structures cognitives, sur les représentations, les théorèmes en actes (invariants opératoires) [8]. Il nous a peu à peu fait passer d'une vision béhaviouriste de la connaissance à une conception constructiviste. Pour qui fait ce passage, il y a un certain nombre de certitudes concernant l'évaluation qui s'effondrent rapidement.
- G. BROUSSEAU pour ses travaux sur la modélisation des situations didactiques (9). La possibilité qu'il fournit d'identifier, dans les situations didactiques, des jeux, des joueurs, des stratégies..., l'importance qu'il accorde au contrat didactique comme règle du jeu (implicite) et surtout aux ruptures de ce contrat, nous ont considérablement aidé à clarifier nos conceptions de l'évaluation.
- Y. CHEVALLARD qui a montré à quel point "les faits d'évaluations ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves" (10). Montrant qu'au sein de la classe (et sans doute à l'intérieur du système scolaire), les processus d'évaluation relevaient davantage de la négociation que de l'expertise, il nous a confirmé dans l'idée qu'une centration trop exclusive sur le savoir risquait de nous conduire à un réductionnisme.

Le tableau présenté page suivante tente de replacer les situations d'évaluation dans leur cadre didactique. Toutefois, il nous semble utile de conserver à ces situations leur spécificité. L'une des exigences énoncées dans les diverses "théories" de l'évaluation est la triple "congruence" objectifs - situations de formation - situations d'évaluation. Or, cette "congruence" n'est pas observée dans les faits, et tout se passe comme si les stratégies de l'enseignant avaient des déterminants différents selon qu'il s'agisse de formation ou d'évaluation. Par exemple, un enseignant peut très bien dispenser un enseignement purement dogmatique et linéaire tout en mettant en place des situations d'évaluation supposant une reconstruction personnelle du savoir. L'inverse peut d'ailleurs tout autant être vrai.

<sup>(5)</sup> G. VERGNAUD, Interactions sujet-situations, 1984, 3º Boole d'été de didactique des mathématiques, édité par IMAG, Université de Grenoble 1.

<sup>(9)</sup> G. BROUSSEAU, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, R.D.M. 1966, vol. 7.2 · Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

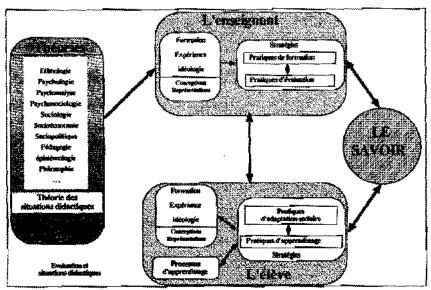
<sup>[10]</sup> Y. CHEVALLARD, Pour une didactique de l'évaluation, IREM de Marseille, 1986.

De même, nous faisons l'hypothèse qu'en ce qui concerne l'élève, il n'y a pas nécessairement adéquation entre les processus d'apprentissage, qui lui sont propres, et les stratégies qu'il développe pour répondre à la demande de l'enseignant: pratiques d'apprentissage consistant par exemple à apprendre chaque soir par cœur la leçon du jour ou à faire des résumés, parce que l'enseignant l'exige de tous ses élèves, alors que cela ne correspond pas à son "style cognitif"; pratiques d'adaptation scolaire, concernant particulièrement l'évaluation, et consistant à détourner la situation à son profit en masquant le plus possible l'état réel de son savoir (ceci allant de stratégies concernant l'ordre de traitement des questions à la fraude systématique — on voit d'ailleurs l'inconséquence qu'il y a à utiliser le mot fraude dans le cas de situations que l'on affirme par ailleurs être d'évaluation formative).

Nous faisons encore l'hypothèse que les stratégies de l'enseignant sont commandées par ses conceptions et ses représentations, elles-mêmes résultant de sa formation, de son expérience et de son idéologie. Formation, expérience et idéologie médiatisent en quelque sorte aussi bien les théories et grilles de lecture diverses que les idées et contraintes du milieu.

Ainsi, dans une salle de professeurs, si l'on entend successivement :

- "Les connaissances s'acquièrent essentiellement par imitation",
- "On ne fait pas boire un âne qui n'a pas soif",
- "Si on ne met pas de notes à leur travail, les élèves ne travaillent pas",
- "Tout travail mérite salaire" jà propos des notes scolaires],
- "Il faut sanctionner toutes les erreurs des élèves",
- "S'ils écoutaient en classe, ils auraient de meilleurs résultats",

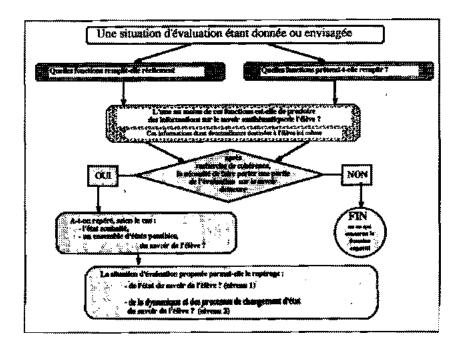


il n'est pas évident de distinguer ce qui provient de l'expérience de ce qui provient de la formation, de l'idéologie ou de l'épistémologie personnelle des enseignants.

La question de l'évaluation du savoir est donc étroitement imbriquée dans d'autres questions; les conflits étant reconnus et étant admis qu'il n'est pas possible de les éliminer tous, nous avons au moins la possibilité de renoncer à poursuivre des buts contradictoires. Nous avons aussi la possibilité d'identifier les situations d'évaluation où le savoir est absent, ainsi que celles où le savoir n'est présent que comme alibi. Le tableau suivant peut aider à cette clarification.

Insistons sur le fait qu'il peut être à la fois légitime et utile d'évaluer autre chose que la qualité du savoir. Le malheur est que bien souvent l'évaluation scolaire ne permet pas de distinguer ce qu'il convient de rapporter au savoir de l'élève et ce qu'il faut rapporter à sa bonne volonté, à son travail, ses efforts,... voire à sa docilité. L'utilisation du mot "travail" est d'ailleurs l'une des sources de confusion, tantôt c'est la quantité de travail, tantôt c'est la qualité du travail considéré comme processus, tantôt c'est la valeur du produit fini qui est en question.

 Distinguer les cas ou le savoir mathématique est (au moins) l'un des enjeux de l'évaluation.



### III. En mathématiques, une expertise du savoir individuel ou collectif, est-elle possible?

Après ce long détour, nous voici donc revenus à notre question initiale. Il nous semble toutefois que nous risquons moins, maintenant, de nous tromper d'objet d'étude et nous n'aurons plus la naïveté de croire que nos observations ainsi que les divers instruments et méthodes que nous pouvons proposer permettront par leur seule vertu de modifier considérablement la réalité de l'évaluation scolaire. En même temps, le type d'étude que nous faisons nous paraît être une condition nécessaire à toute amélioration des procédures d'évaluation en mathématiques, et sans doute à toute amélioration de la qualité des apprentissages.

Mais comment évaluer le savoir individuel dans un domaine donné sans avoir non seulement une vision claire du savoir savant correspondant, mais aussi une vision claire des formes (états) que peut prendre le savoir individuel, et des significations qu'elles prennent aussi bien les unes par rapport aux autres dans la construction du savoir, que la signification qu'elles peuvent avoir par rapport au savoir savant.

Logiquement, le précédent paragraphe devrait nous mener à conclure à l'impossibilité d'évaluer le savoir individuel. En effet, le savoir savant est loin d'être monolithique et la signification d'un comportement particulier (réussite ou échec à une question par exemple) par rapport à la construction du savoir est le plus souvent inconnue. Au mieux, si des études préalables ont été faites, disposera-t-on d'indices de dépendances statistiques, mais leur application au niveau individuel ne va pas sans risque d'erreurs. Le résultat de l'évaluation, considéré comme interprétation des informations recueillies, ne peut donc que dépendre pour une part importante, des conceptions de l'évaluateur aussi bien en ce qui concerne le savoir qu'en ce qui concerne les processus d'apprentissage (son épistémologie personnelle).

Que ce soit à des fins sommatives ou à des fins formatives, l'évaluation du savoir reste inévitable, et en partie indispensable. Il convient donc de reconnaître les risques et tout à la fois de les assumer et de chercher à les limiter. C'est bien là que la notion d'expertise prend tout son sens et qu'elle se différencie totalement de la notion de contrôle. L'expertise laisse une place importante à une réflexion sur la nature du savoir et sur les processus qui président à sa construction, alors que le contrôle suppose un savoir statique et des apprentissages linéaires se reproduisant sous des formes semblables chez tous les individus, lorsque du moins, l'apprentissage a lieu.

Ce qui précède montre l'importance de l'analyse de la pertinence des objectifs et de la validité des évaluations.

#### Pertinence et validité

La recherche de pertinence consiste à identifier les capacités significatives de la maîtrise d'un domaine donné (domaine conceptuel ou domaine de formation selon le cas), capacités assurant à celui qui les possède un réel pouvoir d'action sur des situations signifiantes, et dont l'importance et l'utilité dans le domaine considéré ne pourront que difficilement être mises en doute. Dans des formations à caractère professionnel, l'étude de la pertinence peut se faire à partir de l'examen des postes de travail et des adaptations ou reconversions prévisibles. Même dans ce cas, la pertinence est rarement établie de façon irréfutable. Les choses se compliquent encore pour les formations générales où l'idée de culture intervient. La pertinence doit alors résulter d'une part d'une étude didactique faisant intervenir l'organisation et la cohérence de la discipline ainsi que les dépendances didactiques observées, d'autre part d'un consensus social toujours difficile à établir.

En ce qui concerne la validité, il s'agit d'associer à ces capacités des instruments d'évaluation permettant une "expertise" aussi serrée que possible du savoir du sujet dans le domaine considéré. La validité s'éprouve et se construit tout à la fois en faisant varier les types de questionnement sur un même thème et en rapportant les résultats des évaluations à des modèles possibles du savoir en question.

#### Le problème de la formulation des questions

L'un des problèmes qui se posent est celui de la formulation des questions, et devant le résultat d'une évaluation, il convient de faire la part de ce qui est induit par la question et de ce que l'on peut réellement rapporter au savoir de l'élève.

Le questionnement peut transformer des conceptions fausses ou des sous-compréhensions en savoir apparent, il peut aussi par la dose d'implicite qu'il contient transformer l'évaluation en un jeu de hasard.

Nous n'avons guère la place d'insister sur cette question. On trouvera à la page suivante quelques questions proposées par des enseignants et que l'on pourra soumettre à la critique. L'étude des manuels scolaires est aussi riche d'enseignement à ce sujet.

Sans prétendre donner ici des critères complets et définitifs, nous proposons ci-dessous deux critères d'acceptabilité des questions.

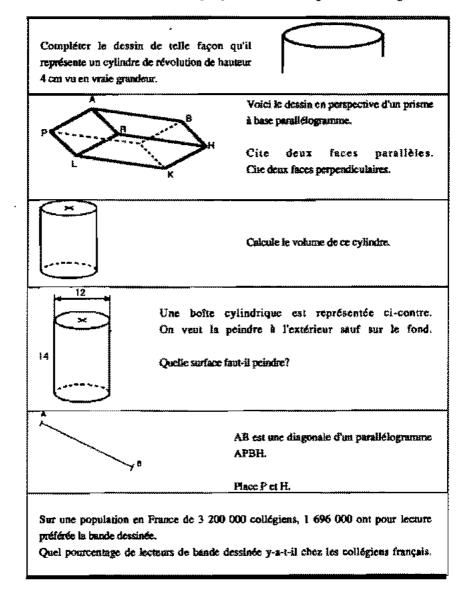
#### Qu'est-ce qu'une bonne question?

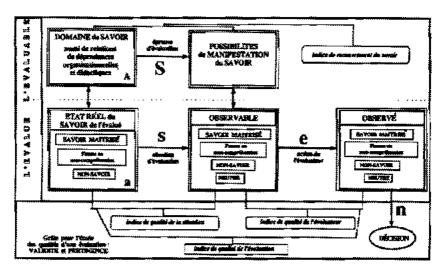
C'est une question qui permet de savoir davantage de choses sur le savoir de celui qui y répond que sur les conceptions de son auteur.

C'est aussi une question qui permet de ne pas confondre l'élève qui n'a pas compris la question et celui qui ne parvient pas à trouver une réponse ou qui fournit une réponse erronée.

#### A propos de la formulation des questions : de l'IMPLICITE aux ERREURS.

Quelques formulations proposées ici et là par des enseignants.





Le tableau de la page précédente propose un moyen, sinon de construire de bonnes épreuves, du moins de comparer les qualités de plusieurs épreuves portant sur un domaine donné. Il met en évidence les différences existant entre le savoir réel de l'élève (inaccessible!), les observables d'une évaluation et ce qui est réellement observé par un évaluateur donné.

#### Une typologie de la signification

Pour l'analyse de la pertinence et de la validité nous croisons l'utilisation des taxonomies habituelles avec ce que nous appelons une typologie de la signification. Pour cela, nous distinguons plusieurs niveaux d'appel du concept et d'intervention de celui-ci, sans pour autant chercher à hiérarchiser ces niveaux. Chaque question d'évaluation peut ainsi être repérée en ce qui concerne le sens du savoir mis en jeu.

Voici, brièvement décrite, cette typologie.

#### Niveau des représentations

Il s'agit des images mentales, mais aussi des images physiques du concept (signifiants). Ce niveau caractérise le sens que l'élève accorde au concept ou à la notion, indépendamment des procédures dont il peut disposer pour traiter des questions où le concept opère, ainsi que des formulations qu'il peut utiliser. Par exemple, concevoir une droite comme infinie n'est pas de même ordre que pouvoir énoncer "une droite est illimitée", phrase apprise qui n'a pas nécessairement de signification claire pour celui qui la proponce.

#### Niveau de la communication

Dans bien des cas, l'appel au concept n'est justifié que pour décrire une situation ou pour coder des informations. Ici, le concept intervient au niveau du langage. C'est ce qui se passe pour le concept de vecteur lorsque l'on énonce:

soit ABCD un quadrilatère tel que AB=2.CD Niveau de l'objet

Dans ce cas, la tâche porte sur l'objet mathématique lui-même, sans support plus ou moins concret qui en assurerait un autre type de signification. Par exemple, un élève peut résoudre une équation donnée sans être capable de communiquer sa démarche ou de valider ses résultats, sans savoir à quel type de problème elle se rattache ni être capable de l'utiliser comme outil dans une autre situation.

#### Niveau de l'outil

Citons R. DOUADY [11]: "Par outil, nous entendons son fonctionnement scientifique (du concept) dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre". Un concept prend son sens par son caractère outil, ou encore: "... avoir des connaissances en mathématiques c'est être capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites adaptés dans des problèmes qui lui donnent leur sens".

Les différents instruments évoqués ci-dessus fournissent des clés pour construire des évaluations et faciliter leur interprétation. Toufefois, les informations utiles résultant d'une même évaluation ne seront pas les mêmes selon la fonction attribuée à cette évaluation. Nous l'avons dit, l'évaluation ne peut être formative que si l'état du contrat didactique le permet. Il y a en fait d'autres conditions : que les informations recueillies apportent un éclairage non trompeur sur certains éléments du savoir de l'élève et que ces informations soient disponibles et utilisables par l'élève, directement, ou par l'intermédiaire de l'enseignant.

### Au-delà des distinctions évaluation formative-évaluation sommative : l'évaluation diagnostique

Quelle soit sommative ou formative, l'évaluation du savoir peut toujours conduire à un diagnostic, et, en général, elle le devrait. La différence tient simplement à l'étendue du domaine de savoir pris en compte. Une décision de fin d'année, par exemple, en principe résultat d'une évaluation sommative, pour pronostique qu'elle soit, est aussi diagnostique. En effet, elle est supposée constituer la meilleure solution possible pour l'amélioration du savoir de l'élève concerné. De même, les multi-

<sup>11.</sup> R. DOUADY, Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

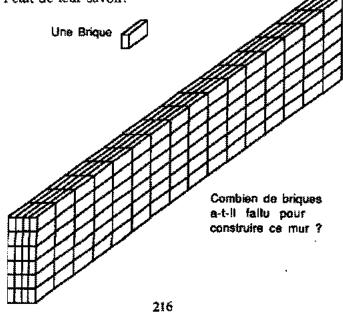
ples décisions que prend quotidiennement un enseignant (choix de tel exercice, organisation des situations de classe... | sont supposées constituer, à chaque fois, les meilleures solutions possibles pour l'amélioration du savoir de ses élèves.

L'évaluation, pour être diagnostique, doit prendre en compte les différences. Elle ne peut qu'être différenciée sinon individualisée. L'illusion de justice, qui consiste à traiter de façon semblable, tout au long de l'année, des élèves dont l'état du savoir est différent, est un obstacle important à une véritable évaluation formative.

Une question d'évaluation doit être considérée comme un indicateur d'état de savoir. Pour cela, l'étude des procédures suivies par les élèves est essentielle, ainsi que l'étude des dépendances statistiques observées lors de nombreuses passations (avec les réserves faites plus haut).

Voici un exemple de question-indicateur : le mur (voir plus bas).

En classe de cinquième, pour une part importante des élèves, il s'agit d'un exercice sans intérêt qu'ils résolvent très facilement, mais pour une partie des élèves en difficulté, la tâche apparaît comme quasi insurmontable. Il y a conflit entre deux types de procédures : procédure dénombrement et procédure mesure. Dans le cas du dénombrement, les briques de coin ne peuvent être comptées qu'une seule fois, alors qu'il semble que, dans le cas de la mesure, elles soient comptées une fois dans chaque direction. Lorsqu'on prend le temps de les observer, ces élèves expriment très clairement cette contradiction. Le temps qu'ils mettent à résoudre cette question, plus que l'exactitude éventuelle du résultat, qui a pu être obtenu après bien des détours, est un indice puissant de l'état de leur savoir.



On pourrait proposer beaucoup d'autres questions ayant un réel pouvoir diagnostique, mais il serait faux de dire que nous en avons pour tous les domaines et pour tous les états possibles de savoir. Il reste un travail important à faire, ne serait-ce que pour rassembler les indicateurs qui ne manquent pas d'apparaître dans la plupart des recherches en didactique des mathématiques. A l'IREM de Besançon, nous commençons à mettre en place une banque de questions informatisée permettant de mettre en valeur l'aspect diagnostique de ces questions.

#### Prise en compte des représentations mentales

Nous avons vu plus haut une typologie qui faisait une place à part aux représentations. Lorsque nous cherchons à mettre au point des situations d'apprentissage, nous commençons toujours par une évaluation de positionnement et cette évaluation comprend en particulier l'analyse des représentations. Notre conception du savoir nous conduit à considérer les représentations comme des savoirs particuliers, qui plus que les savoir-faire institutionnalisés portent la marque des apprentissages et des expériences antérieures.

Par exemple, en classe de quatrième, nous avons pu observer que pour un certain nombre d'élèves, l'intersection d'une sphère et d'un plan était un cercle lorsque le plan était horizontal, mais n'était pas un cercle lorsque le plan était oblique. Plus précisément, et pour résumer:

"La sphère est un objet géométrique rond, développable, sans centre, et ne possédant que quelques symétries. Son intersection par un plan horizontal est en général un cercle, ce qui est plus rarement vrai si le plan est oblique.

Sur la sphère terrestre, le plus court chemin entre deux points de même latitude est un arc du parallèle passant par ces deux points".

Dans ces conditions, il est vreisemblable qu'il ne suffira pas que l'enseignant donne une bonne définition de la sphère pour que les difficultés disparaissent.

#### Des capacités aux compétences

Qu'il s'agisse d'un objectif terminal ou d'un micro-objectif, l'opérationnalisation en fait une situation à laquelle l'élève sera confrontée et qui doit donc être analysée en termes de tâches. Cette analyse, si elle ramène aux contenus, ramène aussi à des processus mentaux plus généraux. L'analyse a priori nous permet de repérer l'instrumentation mentale qui sera sollicitée, ainsi que les capacités strictement liées au domaine concerné. L'analyse croisée, sur ces deux axes |voir diagramme page suivante| permet de mieux comprendre pourquoi des savoirs, dont on sait par ailleurs qu'ils sont disponibles, ne sont pas mobilisés dans une situation donnée. Cette première analyse de la tâche est considérée

comme une hypothèse, l'analyse a posteriori, après expérimentation avec des élèves, remet en cause ces hypothèses, et conduit souvent à modifier considérablement l'analyse précédente.

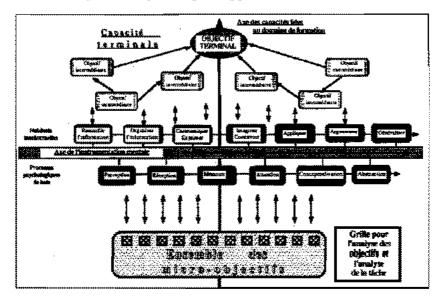
Notre pratique de l'analyse de la tâche est encore tâtonnante, et nous en avons signalé plus haut certaines limites, mais nous tenons à souligner son caractère inhabituel dans les pratiques d'évaluation. Travaillant avec des enseignants, nous ne pouvons qu'être frappés de la difficulté que nous avons à effectuer cette analyse et des cruels démentis que la réalité nous apporte. Le type de relation que les enseignants entretiennent avec la discipline les conduit à contourner les obstacles de façon quasi instinctive et ainsi à sous-estimer les difficultés que rencontreront les élèves.

Considérant l'élève comme un système inconnu susceptible de certains comportements, de certaines actions sur des situations, d'effets divers, nous parlons de compétences (au sens de CHOMSKY) pour exprimer qu'il est capable, à tout moment, de produire des actes intellectuels qu'il n'avait auparavant jamais produits, et nous réservons le terme de capacité pour les effets attestés, dans des situations contrôlées, correspondant à des objectifs soigneusement repérés.

#### On peut aussi dire:

Les compétences sont des capacités correspondant à des objectifs généraux et invariantes par un changement d'opérationnalisation.

Bien sûr, en évaluant, on n'a accès qu'aux capacités, mais ce sont bien les compétences qu'il s'agit d'approcher ou d'inférer.



#### Nécessité de modéliser le savoir

La plupart des paragraphes précédents nous ramènent à la nécessité de disposer de modèles de savoir pour chacun des domaines conceptuels qu'il s'agit d'investir. Certains modèles existent déjà, qui sont plus ou moins formalisés. Les plus connus sont sans doute œux des structures additives et multiplicatives de G. VERGNAUD, mais de nombreuses recherches qu'il n'est pas possible de citer ici permettent d'envisager de tels modèles pour la symétrie orthogonale, pour les probabilités, pour les représentations spatiales. Bien sûr, un travail d'ingénierie didactique important reste à faire.

De tels modèles ne peuvent que résulter de nombreuses observations effectuées dans des conditions variées. Ils demandent ensuite à être validés sur des populations importantes. Les évaluations de programmes effectuées avec l'A.P.M.E.P. pourront être en partie utilisées dans ce sens.

#### IV. Conclusion

La plupart des travaux sur l'évaluation révèlent que dans l'ensemble du système scolaire, l'évaluation se fait le plus souvent dans une confusion totale concernant les fonctions et les enjeux. Les solutions avancées consistent parfois à proposer de confier l'évaluation à des spécialistes. Nous croyons avoir montré qu'au moins en ce qui concerne les mathématiques, un tel évaluateur intervenant dans une classe devrait, d'une part, avoir une meilleure connaissance des mathématiques que l'enseignant de cette classe, et que d'autre part il devrait aussi mieux connaître les élèves de cette classe que cet enseignant. Ce qui, peut-être heureusement, est impossible.

Ce qui est possible par contre et ce que nous essayons de faire, c'est de favoriser chez les enseignants de mathématiques une analyse sans complaisance des procédures utilisées pour l'évaluation et par ailleurs de les munir d'indicateurs leur permettant de toujours mieux repérer l'état du savoir de chacun de leurs élèves.

Il y a déjà quelque temps que les médecins ne fabriquent plus les médicaments qu'ils administrent à leurs patients. Le temps devrait venir où l'enseignant ne sera plus obligée de fabriquer un à un tous les outils dont il a besoin (à usage collectifs alors que les besoins des élèves sont individuels), le temps où il disposera d'une véritable "trousse à outils" lui permettant de mieux diagnostiquer l'état de savoir de ses élèves et par voie de conséquence de mieux favoriser leurs apprentissages.

C'est en tout cas dans cette perspective que nous travaillons.

Besançon, le 4 juillet 1988