informatique

Le problème nouveau est arrivé !

Michel Mérigot
Nice

Durant l'année scolaire dernière, la commission informatique s'est penchée sur les incidences de l'utilisation des calculatrices programmables à travers les sujets d'examen. L'idée du problème qui va suivre nous a été proposée par Michel MERIGOT à partir d'un exercice qu'il proposait en colle à ses élèves (le texte était alors très court : étude de la suite définie par $u_{n+1}=u_n^2-1$ pour tout entier naturel n avec u_0 donné). En sous-groupe, nous avons "décortiqué" l'exercice. Cela m'a conduit à rédiger un TP pour mes élèves de TC.

A la réunion suivante, à partir du texte du TP, des réactions des élèves et des indications que j'avais dû leur donner, nous avons pu rédiger le texte ci-dessous. Et pourquoi pas ce sujet "révolutionnaire" pour la cuvée de 1989 ! Ce texte a déjà fait l'objet d'une diffusion restreinte lors du séminaire et des journées nationales. Nous vous le livrons. Analysez-le ! Critiquez-le ! Faites-nous part de vos réactions !

Loin de se vouloir un exemple à suivre, nous voulons que ce problème soit le point de départ d'une réflexion de l'Association sur l'évolution que pourraient prendre les sujets de bac à la suite de l'introduction des ressources des calculatrices programmables.

Pour la commission informatique,
Yves OLIVIER

Etude d'une suite récurrente définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné

On considère ici $f(x) = x^2 - 1$

1) On se propose d'observer le comportement de la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

a)

α) Programmer cette suite. On précisera l'algorithme de calcul.

β) Soit $u_0 = 1{,}618$. Donner les valeurs de quelques termes de la suite.

γ) Prendre une autre valeur de u_0 et faire le tableau de valeurs.

b) Choisir $u_0 = 1{,}6$. Noter les différentes valeurs et faire une représentation graphique à l'aide des points $M_n(u_n, u_{n+1})$. Faire une conjecture à partir de vos observations.

c) Choisir $u_0 = 1{,}61803$. Noter ce que l'on observe.

2) On se propose de justifier les observations faites au 1).

a) Montrer qu'il existe deux valeurs de u_0, que l'on notera ℓ_0 et ℓ_1 $(\ell_0 < \ell_1)$, telles que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b) Montrer que si $u_0 > \ell_1$ alors la suite est divergente. On pourra montrer que dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \ell_1 \quad \text{et} \quad (u_{n+1} - \ell_1) > (1+\sqrt{5})(u_n - \ell_1)$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n - \ell_1) > (1+\sqrt{5})^n (u_0 - \ell_1).$$

c) Montrer que si $u_0 < -1$ alors $u_1 > 0$. Il suffira donc d'étudier les cas où $u_0 > \ell_1$, $0 < u_0 < \ell_1$, $-1 < u_0 < 0$.

d) Supposons que $-1 < u_0 < 0$.

α) Observer le phénomène avec $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et conjecturer.

β) Programmer les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$. (On pourra d'abord exprimer u_{2p+2} en fonction de u_{2p} à l'aide de la fonction $f\circ f : x \mapsto [(x^2-1)^2 - 1]$). Représenter graphiquement les deux suites en prenant une unité de 10 cm.

γ) Déterminer les solutions de l'équation $f\circ f(x) = x$. Montrer que les sous-suites de rang pair et de rang impair convergent. (On considérera les cas où le premier terme est ou supérieur ou inférieur ou égal à ℓ_0).

3) On suppose que $0 < u_0 < \ell_1$.

a) Calculer $f([0,1[)$. En déduire une valeur de u_0 pour laquelle la suite est constante à partir du 2e terme. Quel est le comportement de la suite lorsque $0 < u_0 < 1$?

b) Déterminer les intervalles $f^{-1}([0,1[) \cap \mathbf{R}^+$ puis $f^{-1}([1,\sqrt{2}[) \cap \mathbf{R}^+$. En déduire le comportement de la suite quand u_0 appartient à ces intervalles.

4) a) Soit f^{-1} la réciproque de f restreinte à $\mathbf{R}^+$ et f^{-n} la fonction $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$. Montre que s'il existe un $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $f^{-n}(0) < u_0 < f^{-n}(1)$ alors $0 < u_n < 1$.
Donner une explication des observations du 1b) et du 1c).

b) On pose $v_k = f^{-k}(0)$ et $w_k = f^{-k}(1)$.
Montrer que les suites $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifient respectivement :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{k+1} = f^{-1}(v_k) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{k+1} = f^{-1}(w_k) \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes vers ℓ_1. Justifier le 1b) et le 1c).