informatique

à propos de "proportionnalité"

Marc Casteleyn, Jacques D'hooghe
Lille

Proportionnalité est le titre d'un ensemble formé de logiciels et de documents pédagogiques réalisés par Marc Casteleyn et Jacques D'Hooghe (professeurs de collège.

Finalités

Pendant l'année scolaire 85-86, nous avons suivi un stage informatique de "formation-production" au C.U.E.E.P. de Tourcoing.

Ayant choisi le thème de la proportionnalité, nous étions chargés de regrouper et d'améliorer les logiciels du C.U.E.E.P., d'en faire l'environnement papier et de créer ce qui manquait.

Nous avions l'aide d'une personne-ressource, Daniel Poisson, un des permanents du C.U.E.E.P.

Notre travail s'est inscrit dans le cadre de la **stratégie mathématique** du C.U.E.E.P., avec, en plus un souci d'articulation entre formation initiale et formation continue. Cette stratégie est fondée sur le concept de **mathématique de situations** et peut être schématisée de la façon suivante :

Situation ou l'on se place.	—	**Support** pertinent à dégager.	—	**Modèle** à reconnaître.

Les logiciels créés sont, pour la plupart, des jeux de cibles.

Ils permettent de rendre **expérimentales** les mathématiques.

En effet, grâce à **l'outil informatique**, les élèves adoptent une démarche "essais-erreurs". Ils peuvent ainsi formuler des hypothèses et élaborer une méthode de travail pour arriver au résultat.

En même temps, ils se familiarisent à des méthodes **transférables** à d'autres contenus.

Précisons que tous ces logiciels ne peuvent être considérés comme "bons" qu'en fonction de leur utilisation sur le terrain. Ils doivent toujours être mis au service d'une **pédagogie active.**

Contexte d'utilisation

Pour qui ?

Au collège, de la sixième à la troisième. En CAP, CPPN. En formation d'adultes (niveaux V et VI).

Comment ?

En super tableau noir où l'image de l'ordinateur est intégrée dans un cours magistral.

En cours TP où le travail en équipes alterne avec le cours magistral.

En accès individuel, avec ou sans l'aide du professeur.

Avec quoi ?

Chaque logiciel est accompagné d'une notice d'utilisation (objectifs et descriptif).

Il est souvent environné par des exemples d'utilisation, des fiches et des documents, ces derniers étant à utiliser, avant, pendant ou après.

Une brochure éditée par l'IREM de Lille, "Mathématiques du consommateur et consommateur de mathématiques" peut fournir d'autres pistes de travail.

Des documents d'auto-évaluation ont été réalisés au C.U.E.E.P.

Objectifs

Objectifs généraux

- Calcul mental, calcul écrit.
- Estimation, ordre de grandeur.
- L'utilisation de calculette.
- Maîtrise du sens des opérations, dans des situations de la vie courante.

• Maîtrise de la proportionnalité sur les 3 supports (tableau graphique-formule).
• Etablir des stratégies.

Objectifs spécifiques

Pourcentages

• Apprentissage et manipulation (calcul, comparaison, estimation).
• Utilisation dans un problème concret (facture).
• Lien avec les fractions et les pentes.

Proportions

• Utiliser le modèle linéaire sur supports tableau et graphique.
• Opérateur x dans les deux sens.
• Résoudre des problèmes avec la règle de trois.

Fractions

• Estimer des fractions de l'unité, leur somme.
• Rechercher par approximations successives.
• Lire des graduations, des fractions.
• Utiliser des opérateurs fractionnaires.
• Rechercher des diviseurs, des nombres premiers.
• Simplifier des fractions.
• Rechercher des fractions équivalentes.
• Dessiner une fraction sur papier à points.
• Réduire au même dénominateur.
• Opérer sur les fractions.
• Faire le lien avec les pentes.

Exemple d'utilisation

Nous avons expérimenté le logiciel "DEVFRAC" en cours TP dans une classe de quatrième.

Situation

Il faut deviner une fraction a/b, satisfaisant aux conditions :

$$0<a<20 \qquad 0<b<20 \qquad a/b<20$$

C'est l'ordinateur qui tire la fraction au hasard.

Supports

Rectangle

Sous une graduation fixe de 0 à 20, est placé un rectangle dont la longueur, à chaque essai, diminue :
— à gauche, si la fraction tapée par l'élève, est inférieure à a/b,
— à droite, si elle est supérieure à a/b.

Si la fraction tapée est a/b, le message "BRAVO" apparaît.

Si la fraction tapée est à l'extérieur de l'intervalle, apparaît le message "FRACTION EN DEHORS DE L'INTERVALLE".

Papier à points

Nous avons choisi, pour aider les élèves dans leur recherche, le papier à points qui permet une lecture aisée de toutes les fractions susceptibles d'être la solution du problème.

Sur papier à points, une fraction est représentée par un point dont l'ordonnée est le numérateur et dont l'abscisse est le dénominateur.

Les points sont de deux couleurs : un point rouge représente une fraction à l'extérieur de l'intervalle de recherche et un point vert représente une fraction possible.

Dès lors, apparaît une fourchette verte de solutions.

Les bornes de l'intervalle de recherche sont rappelées sur le papier à points par deux croix.

Déroulement de la séance

Découverte du problème

Nous laissons les élèves travailler par petits groupes. Aucune consigne n'est donnée. Les élèves doivent se familiariser à la situation et aux supports. Nous jouons un rôle d'observateur.

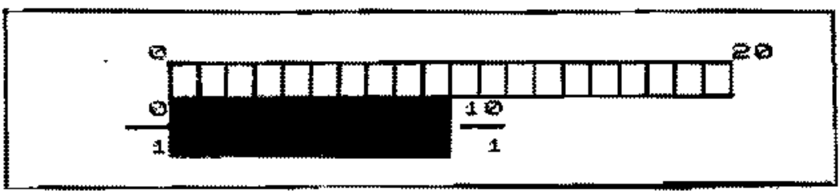
Elaboration d'une méthode de recherche

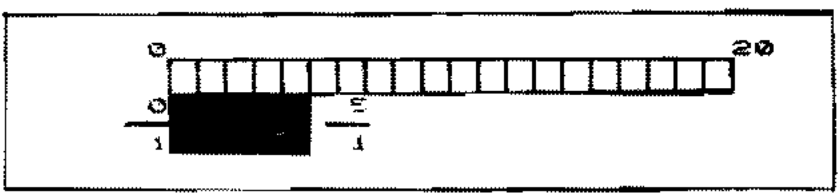
Nous prenons les commandes en utilisant le poste grand écran comme super tableau noir.

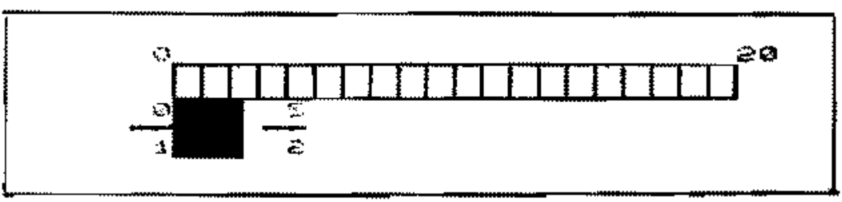
Voici le déroulement d'une *séance en commun* (les dessins ci-dessous sont des copies d'écran) :

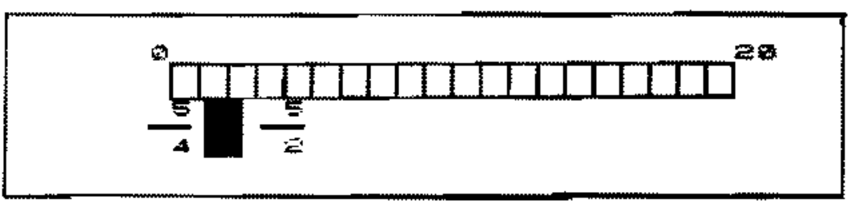
Départ

Nous prenons le milieu de chaque intervalle.

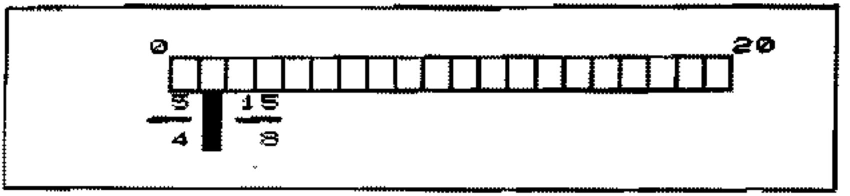






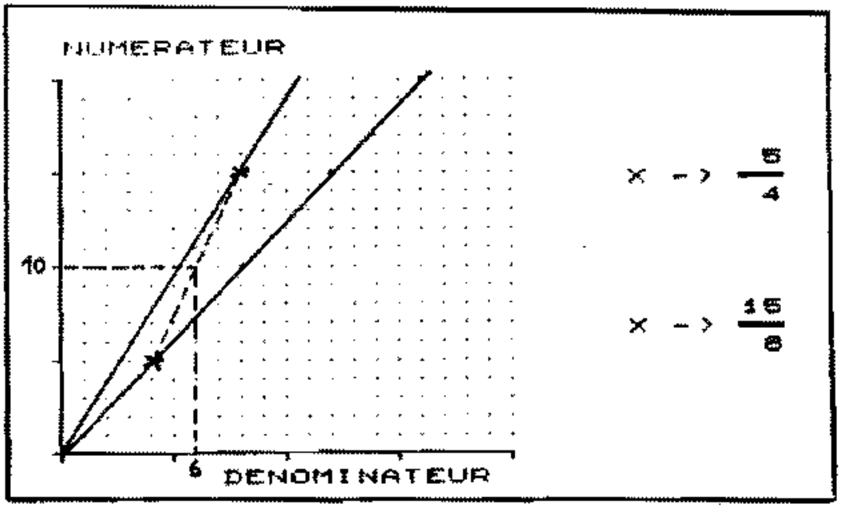


Le calcul du milieu se complique : $1/2(5/4+5/2)=15/8$

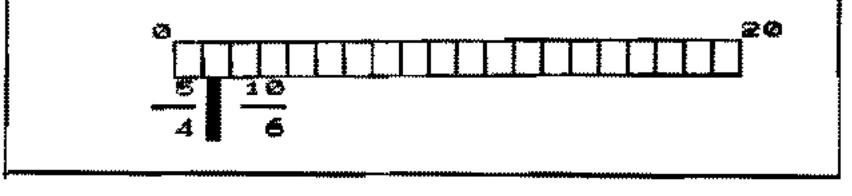


Ensuite, le calcul du milieu conduit à un écueil : 1/2(5/4 + 15/8) = 25/16 (numérateur trop grand).

Les élèves ressentent le besoin d'un support. Nous leur distribuons des feuilles de papier à points et nous leur demandons de faire apparaître la fourchette des solutions possibles de la même manière que sur l'écran.



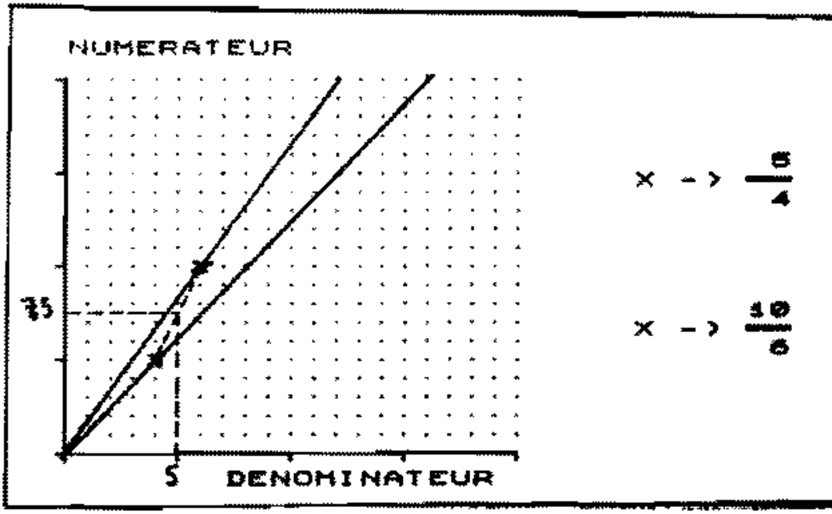
Il est assez naturel de prendre le milieu du segment, point qui correspond à la fraction : 10/6.

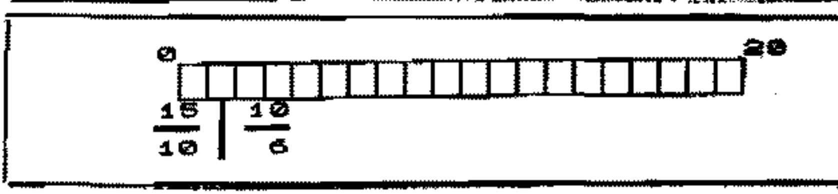


Cette fois-ci, le milieu ne tombe pas juste.

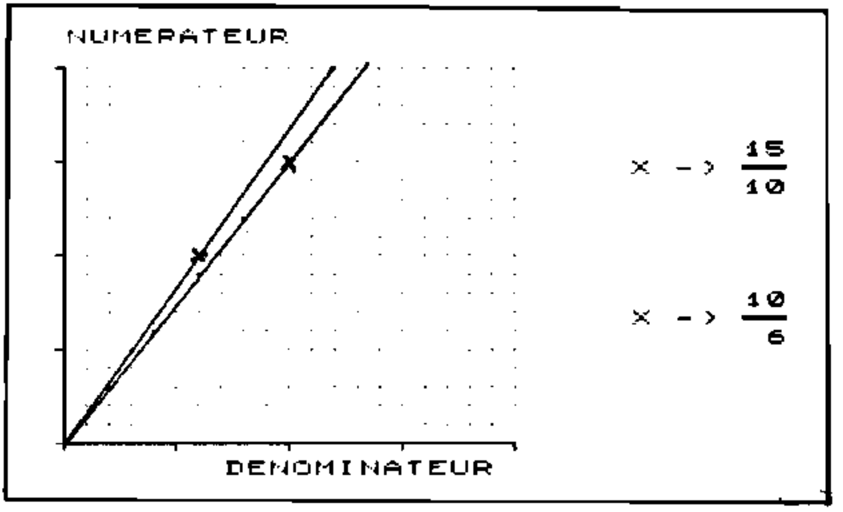
$1/2(5+10) = 7{,}5$ et $1/2(4+6) = 5$ mais $7{,}5/5 = 15/10$

On peut remarquer qu'il suffisait de faire : $(5+10)(4+6)$

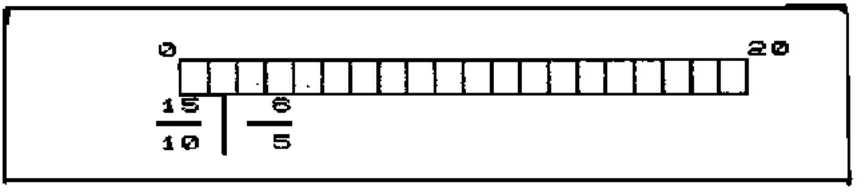




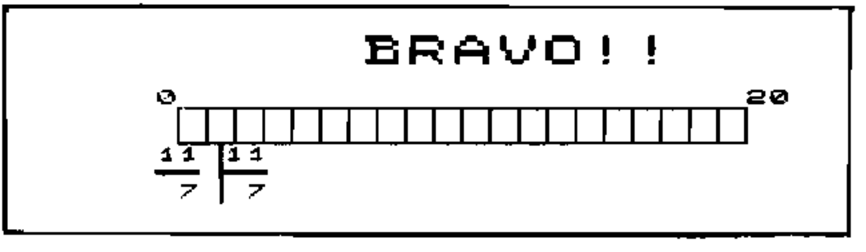
On retombe sur le même écueil : $(15+10)/(10+6) = 25/16$. Le numérateur est trop grand.



D'où l'idée de simplifier : 15/10 = 3/2 et 10/6 = 5/3 ce qui donne : (3 + 5)/(2 + 3) = 8/5



De même, 15/10 = 3/2 et 8/5 donnent : 11/7 qui est la solution.

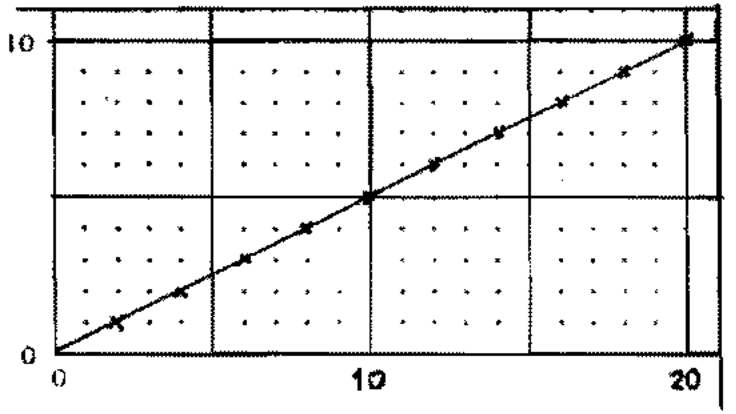


Modèle

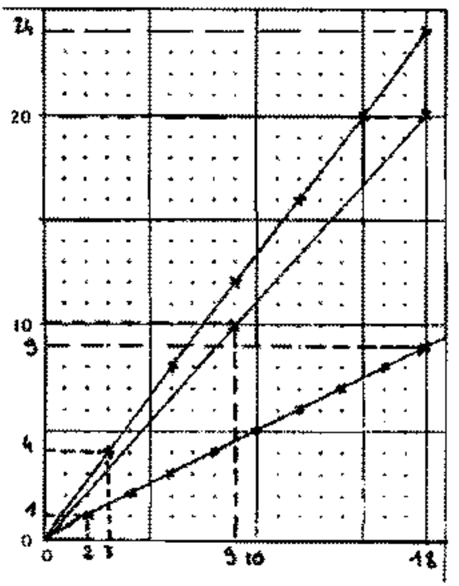
a) A l'aide du "papier à points", nous posons et résolvons les questions suivantes :

Quels sont les points alignés ? A quoi correspondent-ils ? Par exemple, cherchons les points alignés avec 0 et le point associé à 1/2.

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8...



Comment savoir si une fraction est comprise entre 2 autres ? Par exemple, est-ce que 10/9 est comprise entre 1/2 et 4/3 ?



Il suffit de vérifier que le point correspondant à 10/9 est dans la fourchette déterminée par les droites passant respectivement par les points associés à 1/2 et 4/3 ?

Peut-on trouver 3 points sur chacune des 3 droites, qui soient alignés sur une même verticale ?

On trouve ainsi 9/18, 20/18 et 24/18.

Les 3 fractions sont ainsi réduites au même dénominateur et peuvent alors être comparées sur un axe.

Comment trouver une fraction comprise entre 2 autres ?

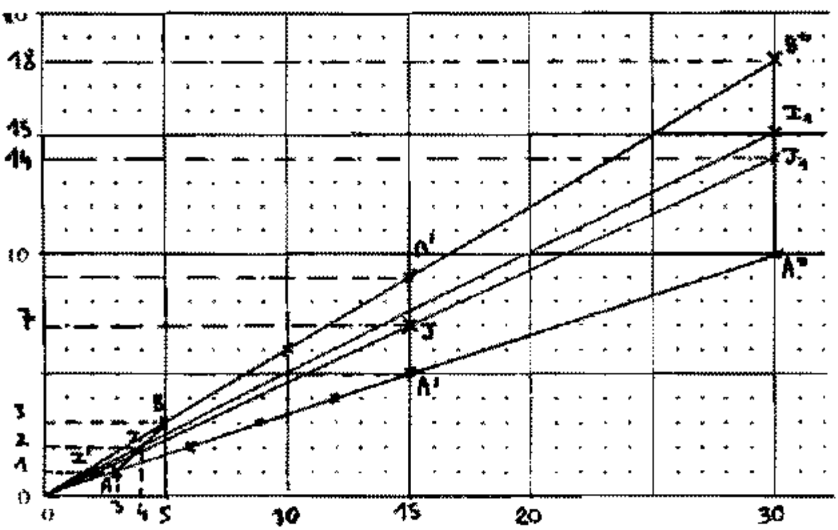
Par exemple, entre 1/3 et 3/5 :

- On peut choisir un point quelconque dans la fourchette.
- On peut aussi choisir des points particuliers.

Appelons A et B les points associés à 1/3 et 3/5. Soit I le milieu de [AB]. Il représente : (1/2)(1 + 3)/(1/2)(3 + 5), c'est-à-dire 2/4. En simplifiant, on obtient 1/2 associée à I'.

Réduisons au même dénominateur 1/3 et 3/5. On obtient 5/15 et 9/15 associées respectivement à A' et B'. Soit J le milieu de [A'B']. Il représente 7/15 = (1/2)/(5/15 + 9/15).

- Comparons 1/2 et 7/15. Les fractions réduites au même dénominateur sont 15/30 et 14/30 associées respectivement à I1 et J1.



Est ainsi mis en évidence que :

$$(1/2)(1/3+3/5) \neq (1/2)(1+3)/(1/2)(3+5)$$

On peut même préciser ici que : $7/15 < 2/4$.

b) Le résultat précédent est-il toujours vrai ? Soit $c/d < c'/d'$.

1) Montrons d'abord que :

$$c/d < (c+c')/(d+d') < c'/d'$$

Il suffit de montrer que :

$$c(d+d') < d(c+c') \quad \text{et} \quad (c+c')d' < c'(d+d')$$

en utilisant l'hypothèse : $cd' < c'd$.

2) Comparons ensuite :

$$1/2\ (c/d+c'/d') \quad \text{et} \quad (1/2(c+c'))/(1/2(d+d'))$$

Il s'agit en fait d'étudier le signe de

$$A = 1/2(c/d+c'/d') - (c+c')/(d+d')$$

Après réduction au même dénominateur, développement et factorisation, on a :

$$\begin{aligned} A &= ((cd'+c'd)(d+d') - (c+c')2dd')/(2dd'(d+d')) \\ &= (d-d')(c'd-cd')/(2dd'(d+d')) \end{aligned}$$

Comme $c'd - cd' > 0$ et $2dd'(d+d') > 0$, il en résulte que le signe de A est égal au signe de $(d-d')$.

Conclusion :

Si $d < d'$ alors $1/2(c/d+c'/d') < (1/2(c+c'))/(1/2(d+d'))$.
Si $d > d'$ alors $1/2(c/d+c'/d') > (1/2(c+c'))/(1/2(d+d'))$.
Si $d = d'$ alors $1/2(c/d+c'/d') = (1/2(c+c'))/(1/2(d+d'))$.

On peut ensuite vérifier sur "papier à points" ou par le calcul sur des exemples correspondant à chaque cas.

Evaluation formative avec retour au logiciel

Nous divisons la classe en deux groupes : un groupe travaille sur ordinateur afin de réinvestir les nouvelles connaissances et l'autre groupe travaille sur la fiche "papier à points et fractions" qui se trouve dans la brochure.

Nous jouons un rôle d'observateur.

L'important n'est pas de mettre une note mais l'étude du comportement des élèves.

Il est également possible de distribuer et d'étudier le document "Les Clubs Sportifs" contenu dans la brochure, permettant une autre utilisation du papier à points.

Conclusion

Ce logiciel nous a permis de rester le pilote de la séance, de faire découvrir et d'utiliser le papier à points, de motiver les élèves à la démonstration.

Chaque élève a gardé des traces de son travail et n'a pas subi une séance "tout écran".