

# manuels

---

## *réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels*

*par Aline Robert*

*Maître de conférence de l'Université Paris VI*

### **Préambule**

Ce travail s'inscrit dans une réflexion plus générale sur les mathématiques et leur enseignement, où l'on caractérise en particulier les contenus visés par l'enseignement en termes de concepts outils ou objets (avec leurs relations), en s'attachant à distinguer leurs différents cadres d'intervention.

L'article de R. Douady "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", paru dans le volume 7.2 de la revue *Recherche en didactique des mathématiques* permet une bonne mise au point de toutes ces notions.

On est aussi amené à introduire la différence, pour les caractères outils des concepts, entre le fait d'être utilisés correctement par les élèves si on le leur demande explicitement (on parlera alors de propriété mobilisable) et le fait d'être utilisé à bon escient, sans qu'il en ait été fait mention dans l'énoncé (on parlera alors de propriété disponible).

Ceci se justifie par le fait que nous assignons à l'enseignement des mathématiques l'objectif de rendre disponibles un certain nombre de concepts pour un grand nombre d'élèves, du moins dans l'enseignement obligatoire et pour les élèves scientifiques de l'enseignement post-obligatoire. De plus nous pensons que c'est le caractère disponible de

certains concepts, en particulier dans certains cadres, qui permet une construction satisfaisante de nouveaux concepts, surtout si ces derniers sont source de difficultés (pour les élèves).

Tout cela explique que l'on ait retenu ces critères d'analyse de contenu des textes d'exercice, puisque les analyses didactiques qui pourraient utiliser nos classements se font dans ces termes.

En ce qui concerne l'enseignement précisément, on se place dans une perspective didactique : l'organisation des activités des élèves, et en particulier la répartition entre les interventions de l'enseignant et les travaux des élèves nous semble déterminante (compte tenu des contenus visés évidemment).

C'est ce qui explique les restrictions apportées au début du texte sur la portée relative des analyses de contenus des exercices, qui ne peuvent prendre leur intérêt qu'à condition de tenir compte de tout ce qui est fait dans la classe. D'ailleurs, il faudrait toujours faire précéder une analyse des exercices de l'analyse mathématique, voire épistémologique, des notions correspondantes, en tenant compte du niveau de connaissances des élèves.

## **Comment analyser des textes d'exercices ou de problèmes d'un manuel ?**

Cette question se pose dans un cadre plus général, qui lui donne son intérêt, notamment quel usage font les élèves (et les professeurs) des exercices des manuels et quel effet peut avoir sur l'acquisition des connaissances des élèves la résolution de tel ou tel exercice compte tenu de cet usage.

D'ailleurs cette question ne prend son sens que pour l'analyse d'un grand nombre d'exercices.

Ceci dit, selon le moment où un même exercice est proposé aux élèves, il peut servir à plusieurs finalités, différentes pour l'apprentissage : exploration d'un problème (avant le cours le cas échéant), ou familiarisation avec une technique ou un théorème... ou réinvestissement d'une connaissance déjà acquise dans un certain contexte différent, ou même évaluation.

De même les conditions de production des solutions sont déterminantes pour interpréter l'efficacité (présumée) de l'exercice : ce peut être un contrôle, ou au contraire un exercice à la maison où on a tout son temps, etc...

Enfin il y a dans la classe un contrat non entièrement explicite qui a son rôle dans l'interprétation des textes d'exercice par les élèves et leur traitement.

Ainsi, une analyse complète des exercices et de leur rôle présumé dans l'acquisition des connaissances ne peut se faire sans tenir compte du contexte général et de l'organisation de l'enseignement étudié.

Et pourtant, un exercice proposé aux élèves dans des conditions analogues peut ne pas être traité de la même façon suivant la manière dont il est énoncé, le travail nécessaire à sa résolution et à sa rédaction peut même varier considérablement en fonction du texte donné. Et ce texte est associé a priori à certaines connaissances qui seront nécessaires à la résolution, éventuellement à des titres divers.

Cela justifie le fait de se livrer, sans en exagérer l'importance par rapport à l'étude de l'organisation globale cours-exercices, à une petite analyse "interne", a priori, des textes d'exercices.

Nous allons donc *dégager quelques axes d'analyse* des textes d'exercice. Nous devons tout de suite préciser que selon les notions étudiées et le niveau considéré (premier cycle ou second, géométrie, analyse, nombres complexes...) tel ou tel caractère de l'exercice sera plus ou moins pertinent.

Il resterait à analyser sérieusement et en expérimentant les implications éventuelles de la nature de l'exercice telle qu'on sera alors en mesure de la préciser en fonction des indicateurs retenus, ce que nous ne ferons pas ici, nous contentant de quelques hypothèses empiriques et a priori sur le sujet...

Bien entendu la longueur des exercices et la façon dont les différentes questions se relient entre elles sont les premières choses qui peuvent différencier les textes. Nous parlons ici d'exercices pas trop longs et relativement indépendants donc.

Nous supposons aussi que les exercices sont correctement posés : toutes les notations utilisées sont introduites, réciproquement on n'a rien introduit d'inutile, il n'y a pas de dénominateur éventuellement nul ni de racine carrée ou de logarithme de nombre éventuellement négatif...

### **Indications sur ce qu'il y a à utiliser**

1. Si on peut assigner au cours présent dans les manuels l'objectif de livrer un certain texte du savoir, avec les caractères objets des concepts, de même on peut a priori assigner aux exercices des objectifs en terme de caractères outils des concepts :

\* on peut trouver des exercices destinés à rendre mobilisable tel ou tel caractère outil d'un concept, telle ou telle technique, tel ou tel théorème (par mise en fonctionnement provoquée explicitement dans un contexte plus ou moins particulier) ;

\* on peut aussi rencontrer des exercices destinés à rendre tel caractère outil d'un concept disponible par une mise en fonctionnement qui doit être décidée par l'élève et non provoquée par le seul texte de l'exercice.

On pourrait encore penser à des exercices servant d'introduction à un nouveau concept par utilisation (découverte) d'un caractère outil nouveau d'un concept mais ces exercices s'ils sont proposés apparaissent plutôt dans les textes des cours (au début).

Bien entendu il faut tenir compte du découpage du manuel et des indications qui sont données globalement ; ainsi dans certains manuels on indique dans le cours (par un renvoi) les exercices d'application correspondants au texte considéré, dans d'autres on met en titre d'une série d'exercices ce qu'on fait fonctionner etc...

### Degré d'ouverture de l'énoncé

2. Une deuxième possibilité d'analyse complémentaire de la précédente est d'étudier la manière dont les questions sont posées, ce qui amène à s'intéresser à l'ouverture de l'exercice, c'est-à-dire à caractériser ce qu'il reste à faire aux élèves (compte tenu de leur cours).

On peut avoir des questions complètement fermées, du style "montrer que... en utilisant..." où finalement la tâche de l'élève consiste à appliquer sans transformation un résultat du cours plus ou moins précisé, en particulier à faire fonctionner un algorithme (en général cela correspond à un exercice où on cherche à faire simplement mobiliser un caractère outil).

C'est ce qu'on appelle quelquefois un *énoncé fermé*.

Donnons un exemple :

Soit  $ABC$  un triangle,  $O$  le centre du cercle circonscrit. Montrer que le point  $M$  défini par  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  est le point d'intersection des hauteurs du triangle en calculant les produits scalaires  $\vec{AM} \cdot \vec{BC}$  et  $\vec{BM} \cdot \vec{AC}$ .

Plus souvent on propose aux élèves des énoncés qu'on peut qualifier de *quasi fermés*, en ce sens qu'on leur indique par exemple ce qu'il y a à démontrer mais sans leur donner d'indications de méthodes : "montrer que...".

Donnons un exemple :

Soit  $ABC$  un triangle,  $O$  le centre du cercle circonscrit. Montrer que le point  $M$  défini par  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  appartient aux trois hauteurs du triangle.

Cependant dans la mesure où l'exercice est posé dans un chapitre donné du cours, éventuellement même précédé d'un sous-titre précisant la partie du cours concernée ou le degré d'éloignement du cours [appli-

cations, approfondissement...), l'indication est en fait implicite mais il peut y avoir à adapter, voire à transformer un peu ou l'énoncé ou le cours.

Enfin il existe des exercices qu'on pourrait appeler *ouverts* ou *quasi ouverts*, où peu de choses sont indiquées aux élèves, ni précisément ce qu'il y a à démontrer (par exemple avec un énoncé du type "que peut-on dire de...") ni les méthodes, ou bien encore où ce qu'il y a à démontrer est suffisamment général pour que le problème de transformation de la consigne reste entier (par exemple "construire un carré inscrit dans un quadrilatère donné").

Donnons un exemple :

Soit  $ABC$  un triangle,  $O$  le centre du cercle circonscrit et  $H$  l'orthocentre. Montrer que  $H$  vérifie  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

Ou encore :

Soit  $ABC$  un triangle,  $O$  le centre du cercle circonscrit. Que peut-on dire du point  $M$  défini par  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  ?

Le plus souvent ces exercices sont relativement généraux ou tout au moins généralisables (mise en évidence ou utilisation dans un cas particulier d'un invariant). On n'évoque évidemment pas ici des exercices trop longs auxquels on pourrait alors ramener toutes les mathématiques ou presque...

Il y a alors intérêt à étudier le degré de transformation qu'il y a à faire subir aux énoncés successifs sur lesquels on travaille (introduction d'éléments auxiliaires ou de notations supplémentaires, changements de formalisation, de points de vue, de cadres, ou même de stratégie), le degré d'adaptation des énoncés du cours qu'il y a à utiliser (contextualisation) et la longueur (moyenne !) du travail à fournir pour arriver au résultat (étapes indispensables).

Enfin selon les exercices il y a ou non plusieurs manières de procéder pour résoudre, et cela nous semble une caractérisation importante des exercices ouverts.

### Cadre à utiliser

3. Dans le même ordre d'idées, il est intéressant de regarder systématiquement dans quel(s) cadre(s) on fait fonctionner les concepts dans chaque exercice étudié et s'il y a des changements de cadres à effectuer (soi-même ou non).

### Degré de généralité

4. Une quatrième caractérisation, peut-être plus pertinente en géométrie, concerne le degré de généralité des énoncés.

Si on réfléchit à ce qu'il peut y avoir à faire dans un exercice, on arrive aux diverses possibilités suivantes : ou bien appliquer un invariant (exposé aux élèves dans le cours de façon décontextualisée) dans une situation particulière justiciable de la chose ; par exemple trouver que des droites dans une configuration donnée et particulière sont concurrentes parce que ce sont les hauteurs d'un triangle. Il faut alors identifier dans la situation particulière l'invariant à utiliser.

Il se peut au contraire qu'il y ait à exploiter les particularités d'une situation pour trouver le résultat, qui alors n'est pas généralisable ; par exemple établir une convergence de suite liée à la forme très particulière de la suite.

Dans certains exercices enfin, il s'agit d'établir un nouvel invariant, avec un certain degré de généralité ; par exemple montrer que dans un triangle l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés. Dans ce dernier cas on peut ou non faire appliquer le résultat qu'on vient d'obtenir à une situation particulière et on peut ou non faire d'abord établir le résultat dans un cas particulier et le faire généraliser ensuite.

### Degré d'implicite

5. Une autre caractérisation concerne le degré d'implicite de l'énoncé, par exemple à propos d'existence (admisses implicitement) : c'est souvent le cas dans des problèmes de construction. Ainsi, si on demande de construire un carré inscrit dans un quadrilatère, implicitement on suppose que ce carré existe, ce qui n'a rien d'évident dans un premier temps.

Les exercices d'optimisation procèdent souvent de même, faisant admettre sans l'annoncer qu'il existe un objet minimum ou maximum et faisant travailler directement dessus. Par exemple dans l'exercice suivant : "trouver le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné" (problème de Fagnano). Or la démonstration est différente selon qu'on a à caractériser un triangle dont on sait qu'il existe (on démontre qu'un sommet quelconque est pied de la hauteur correspondante donc les trois sommets ont cette propriété) ou selon qu'il faut démontrer qu'il en existe un tel triangle et le caractériser.

Dans le même ordre d'idées on peut analyser si toutes les hypothèses sont rappelées dans l'énoncé, par exemple dans quel plan (orienté ou non) on est, ou si tous les cas particuliers ont été repérés et ont un statut... Cela peut se traduire d'ailleurs par des hypothèses ou par des questions.

### Hypothèses

Nos hypothèses au sujet des textes d'exercices sont les suivantes. En premier lieu, nous pensons qu'il faut proposer (selon les moments

et les objectifs suivis) des exercices *de tous les types* aux élèves et ne pas se cantonner aux exercices fermés servant à faire mobiliser un concept dans un seul cadre.

Il serait important que les manuels proposent des formes d'exercices variées, pour faciliter les apprentissages, par exemple par des mises en fonctionnement de changements de cadres, ou encore par des recherches de ce dont on dispose pour aborder un problème donné. Il s'agit aussi d'habituer les élèves à la pratique suivante : contextualisation - décontextualisation - recontextualisation, qui nous semble susceptible d'engendrer une bonne dynamique de construction des connaissances.

Nous estimons de plus que cette variété permet d'établir un contrat non figé, et d'éviter que les élèves, même inconsciemment, ne se livrent à la recherche systématique d'indices extérieurs à la tâche au cas où il n'y aurait qu'un type d'exercices.

En fait, nous pensons que les exercices fermés vont plutôt être associés à des familiarisations (rendre mobilisables certaines notions), et les exercices ouverts à l'acquisition d'une certaine disponibilité (surtout s'ils sont l'occasion de jeux de cadres).

Certes, les exercices ouverts sont plus difficiles mais nous faisons l'hypothèse qu'ils peuvent être proposés moyennant des conditions à remplir pour en rendre possible la résolution (comme un apprentissage de méthodes, ou un travail en groupe...).

Dans cet ordre d'idées, le fait de donner un titre aux exercices (quand c'est possible), nous semble important pour plusieurs raisons liées à cette ouverture éventuelle. Plus l'exercice est ouvert, plus il est important, nous semble-t-il, de lui donner un titre.

Le titre permet en effet aux élèves de préciser tout de suite le type du problème et son but (construction, étude de suites particulières ou générales, calcul d'aires...), or de toutes façons l'élève aura à repérer ce type surtout s'il est confronté à un exercice ouvert.

Le fait d'habituer les élèves à des exercices dont on peut donner le titre est une indication implicite du fait que l'on peut classer de cette façon les exercices et qu'un exercice sert à démontrer quelque chose et pas seulement à vérifier des connaissances "ad hoc".

De plus dans une analyse d'exercices de manuels, le fait qu'il y ait un titre est l'indice qu'on propose effectivement de tels exercices. D'autre part il nous semble que les élèves s'ils ont pris l'habitude d'avoir des titres (au début ils n'aiment pas ça, car c'est souvent l'indice d'un exercice où il va falloir s'investir...) peuvent être par la suite motivés par le fait qu'ils savent ce qu'ils sont en train d'obtenir. Cela peut aussi éventuellement enfin contribuer à mémoriser (même vaguement) le résultat.

Enfin nous pensons que les implicites (cf 5) sont à éviter dans la mesure du possible, d'autant plus que cela amène à des ruptures de contrat et à des incohérences pour l'élève... Sauf si on en profite pour faire travailler de manière critique les élèves sur les énoncés correspondants !

### **N.D.L.R. (Henri Barell)**

Il existe, depuis 1973-1974, un groupe de travail (ou commission) "Manuels Scolaires" Inter-IREM et A.P.M.E.P.

Ce groupe a publié, depuis :

- des grilles d'analyse (cours, activités, exercices...) les plus récentes, allégées pour permettre des analyses assez rapides, ont parues ces dernières années dans le *Bulletin* ;
- des résultats d'enquêtes, ou d'analyse des manuels, parfois publiés en brochure (1976) ou dans le *Bulletin*, ou par un IREM, toujours communiqués sur simple demande.

Il aimerait que les adhérents A.P.M.E.P., individuellement, ou en équipe — par le biais des Régionales par exemple —, participent plus fortement à ses activités (par correspondance, ou directement lors des réunions).

Il nous semblerait également plus que souhaitable que tous les travaux lancés indépendamment de ce groupe de travail lui soient aussitôt communiqués dès lors qu'ils émanent d'adhérents A.P.M.E.P. ou de formateurs d'IREM. De plus, avant d'entreprendre de tels travaux, il serait raisonnable de prendre connaissance des réalisations antérieures du groupe de travail et de se coordonner si possible avec ses activités actuelles et ses projets. Merci d'avance !

Responsable du groupe de travail : Michèle PECAL