recherche de solutions approchées d'une équation $f(x)=0$

par G. Macia
Lycée Paul Langevin - Martigues

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est dérivable jusqu'à l'ordre deux sur un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$.
- chacune des fonctions dérivées f' et f'' garde un signe constant sur l'intervalle $[a,b]$.
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Il existe alors un seul réel α appartenant à l'intervalle $]a,b[$ solution de l'équation $f(x)=0$. Il s'agit de déterminer un encadrement de α.

Quatre cas se présentent suivant les signes de f' et f'' sur l'intervalle $[a,b]$. On peut étudier séparément chacun de ces cas, ou bien se ramener à l'un d'eux par des considérations géométriques (symétrie par rapport à l'un ou (et) l'autre axe de coordonnées).

Etude du cas $f'>0$ et $f''>0$ sur l'intervalle $[a,b]$

$f'>0$ sur l'intervalle $[a,b]$, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, donc f est strictement croissante sur $[a,b]$, $f<0$ sur $[a,\alpha[$, $f>0$ sur $]\alpha,b]$.

$f''>0$ sur l'intervalle $[a,b]$, donc f' est strictement croissante sur cet intervalle et pour tout réel x de $[a,b]$, $f'(a)\leqslant f'(x)\leqslant f'(b)$. L'intervalle $[\alpha,b]$ est inclus dans l'intervalle $[a,b]$, donc pour tout réel x de $[\alpha,b]$, $f'(a)\leqslant f'(x)\leqslant f'(b)$, et d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$f'(a)(b-\alpha)\leqslant f(b)-f(\alpha)\leqslant f'(b)(b-\alpha).$$

Sachant que $f(\alpha)=0$ et $f'>0$ sur $[a,b]$, on en déduit l'encadrement :

$$b-\frac{f(b)}{f'(a)}\leqslant\alpha\leqslant b-\frac{f(b)}{f'(b)}\qquad(1).$$

De même, en considérant l'intervalle $[a,\alpha]$, on obtient l'encadrement :

$$a-\frac{f(a)}{f'(b)}\leqslant\alpha\leqslant a-\frac{f(a)}{f'(a)}\qquad(2).$$

Par suite, d'après (1) et (2),

$$a-\frac{f(a)}{f'(b)}\leqslant\alpha\leqslant b-\frac{f(b)}{f'(b)}\qquad(3).$$

Interprétation graphique de l'encadrement (3)

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f. La tangente à la courbe (C) au point de (C) d'abscisse b a pour équation

$$y = f'(b)(x-b) + f(b).$$

Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

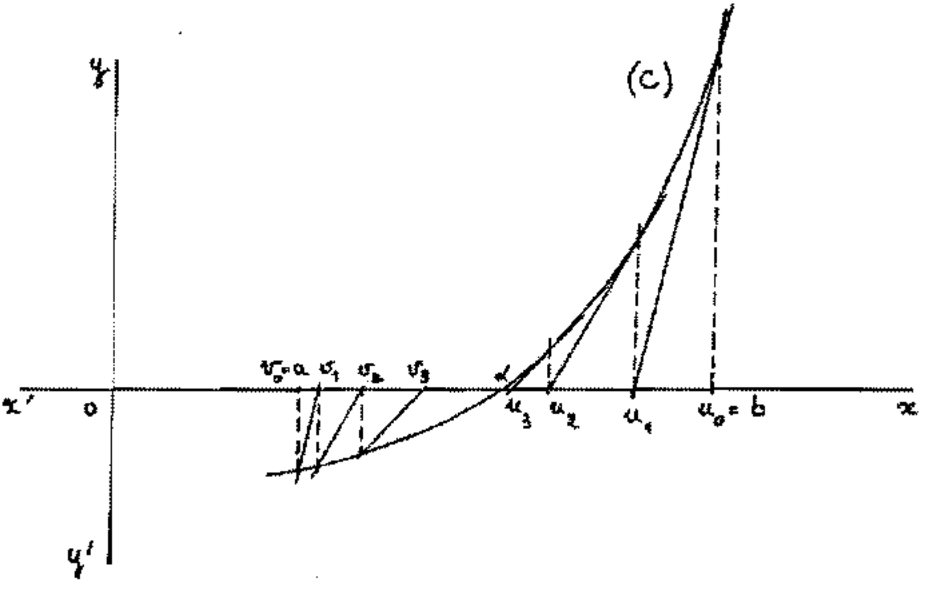
$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

La droite passant par le point de la courbe (C) d'abscisse a et parallèle à la tangente précédente a pour équation $y = f'(b)(x-a) + f(a)$. Cette droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$. Par itération de la construction, on peut conjecturer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = b$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$,

$v_0 = a$ et pour tout naturel n, $v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(u_n)}$,

permettent d'obtenir un encadrement de α d'amplitude aussi petite que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.



Etude de la suite (u_n)

Soit g la fonction définie par $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Pour tout naturel n, $u_{n+1}=g(u_n)$. Pour tout x de $[a,b]$, $g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Sur $[\alpha,b]$, g' est positive, nulle seulement en α, g est strictement croissante et $g(\alpha)=\alpha$.

On démontre alors par récurrence que pour tout naturel n, $\alpha\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant b$. En effet,

$$u_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}\ ,\quad \alpha\leqslant u_1 \text{ d'après (3).}$$

$\frac{f(b)}{f'(b)}>0$ donc $b-\frac{f(b)}{f'(b)}\leqslant b$, $u_1\leqslant u_0$. Par suite, $\alpha\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant b$.
Si pour un naturel k, $\alpha\leqslant u_{k+1}\leqslant u_k\leqslant b$, alors :
$g(\alpha)\leqslant g(u_{k+1})\leqslant g(u_k)\leqslant g(b)$, $\alpha\leqslant u_{k+2}\leqslant u_{k+1}\leqslant b$ (car $g(b)=u_1$ et $u_1\leqslant b$).

Etude de la suite (v_n)

On démontre par récurrence que pour tout naturel n,
$a\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant \alpha$.

En effet, $v_1=a-\frac{f(a)}{f'(b)}$, $v_1\leqslant\alpha$ d'après (3). $\frac{f(a)}{f'(b)}<0$ donc

$$a-\frac{f(a)}{f'(b)}\geqslant a\ ,\quad v_1\geqslant v_0\ .$$

Par suite, $a\leqslant v_0\leqslant v_1\leqslant\alpha$.

Supposons qu'il existe un naturel k tel que

$$a\leqslant v_k\leqslant v_{k+1}\leqslant\alpha\ .\ v_{k+2}=v_{k+1}-\frac{f(v_{k+1})}{f'(u_{k+1})}\ ,$$

$$f(v_{k+1})\leqslant 0\ ,\quad f'(u_{k+1})>0\ ,\quad \frac{f(v_{k+1})}{f'(u_{k+1})}\leqslant 0\ ,\quad \text{donc}\quad v_{k+2}\geqslant v_{k+1}\ .$$

Soit h la fonction définie par

$$h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(u_{k+1})}\ .h(v_{k+1})=v_{k+2}\ \text{ et }\ h(\alpha)=\alpha\ .$$

Pour tout x de $[a,b]$, $h'(x)=\frac{f'(u_{k+1})-f'(x)}{f'(u_{k+1})}$.$f'(u_{k+1})>0$, f' est strictement croissante sur $[a,b]$, $u_{k+1}\geqslant\alpha$, donc pour tout x de $[a,\alpha]$, $h'(x)\geqslant 0$; h est croissante sur $[a,\alpha]$. $v_{k+1}\leqslant\alpha$ donc $h(v_{k+1})\leqslant h(\alpha)$, $v_{k+2}\leqslant\alpha$. Par suite $a\leqslant v_{k+1}\leqslant v_{k+2}\leqslant\alpha$.

Etude de la différence $u_n - v_n$

Pour tout naturel n, $u_n - v_n \geqslant 0$.

Pour tout naturel n, $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n + \dfrac{f(v_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$.

En considérant l'intervalle $[v_n, u_n]$ et d'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient l'encadrement

$$f'(v_n)(u_n - v_n) \leqslant f(u_n) - f(v_n) \leqslant f'(u_n)(u_n - v_n).$$

On en déduit que

$$f(v_n) - f(u_n) \leqslant -f'(v_n)(u_n - v_n), \quad u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant u_n - v_n - \frac{f'(v_n)(u_n - v_n)}{f'(u_n)},$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant (u_n - v_n)\left(1 - \frac{f'(v_n)}{f'(u_n)}\right).$$

D'autre part, $f'(v_n) \geqslant f'(a) > 0$ et $0 < f'(u_n) \leqslant f'(b)$, donc

$$\frac{f'(v_n)}{f'(u_n)} \geqslant \frac{f'(a)}{f'(b)}, \quad 1 - \frac{f'(v_n)}{f'(u_n)} \leqslant 1 - \frac{f'(a)}{f'(b)}.$$

Par suite $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant (u_n - v_n)\left(1 - \dfrac{f'(a)}{f'(b)}\right)$.

$0 < f'(a) < f'(b)$ donc $0 < 1 - \dfrac{f'(a)}{f'(b)} < 1$. Par un procédé habituel, on montre alors que pour tout naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant (u_0 - v_0)\left(1 - \frac{f'(a)}{f'(b)}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim(u_n - v_n) = 0$$

(la dernière inégalité est également vérifiée pour $n = 0$).

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et ont pour limite α.

Application numérique

Pour $f(x) = x - 3\ln x$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions α_1 et α_2 appartenant respectivement à $]1,5;2[$ et $]4,5[$.

Résultats pour α_1 :

$u_0 = 1,5$; $u_1 = 1,783604676$; $u_2 = 1,85344065$; $u_3 = 1,857174504$; $u_4 = 1,85718386$; $u_5 = u_4$;

$v_0 = 2$; $v_1 = 1,920558458$; $v_2 = 1,865880642$; $v_3 = 1,857281517$; $v_4 = 1,857183868$; $v_5 = u_5$.

$u' = u_5$; $f(u') = 10^{-10}$. $v' = 1,85718387$; $f(v') = -5,9 \times 10^{-9}$. $u' < \alpha_1 < v'$.

Résultats pour α_2 :

$u_0 = 5$; $u_1 = 4{,}570784343$; $u_2 = 4{,}536651852$; $u_3 = 4{,}536403667$;
$u_4 = 4{,}536403654$; $u_5 = u_4$;

$v_0 = 4$; $v_1 = 4{,}397207708$; $v_2 = 4{,}530193236$; $v_3 = 4{,}536394684$;
$v_4 = u_4$.

$u' = 4{,}536403655$, $f(u') = 2 \times 10^{-10}$.$v' = v_4$, $f(v') = -2 \times 10^{-10}$.$v' < \alpha_2 < u'$.