les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 152 (Concours général 1988)

On considère deux sphères S_1 et S_2 et une droite D ne les rencontrant pas. Soit M un point de D et, pour $i=1$ et $i=2$, T_i le point de contact avec S_i d'une tangente à S_i passant par M.

Situer M sur D de façon que MT_1+MT_2 soit minimum.

ÉNONCÉ N° 153 (Olympiades internationales 1987)

Existe-t-il une application f de N dans N telle que pour tout entier n, $f(f(n))=n+1987$?

ÉNONCÉ N° 154 (Eric TÉROUANNE, Montpellier)

On appelle auto-énumération de longueur p une suite de p entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ telle que parmi $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ il y ait a_0 fois le nombre 0, a_1 fois le nombre 1, ..., a_{p-1} fois le nombre $p-1$.

Pour quels entiers p existe-t-il des auto-énumérations de longueur p ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 137 (Jean-Louis NICOLAS, Limoges)

J'ai dans ma poche un certain nombre de pièces de 1, 2, 5 et 10 francs. Je peux, avec ces pièces, payer exactement n'importe quelle somme d'argent (en nombres entiers) entre 1 et 99 francs, mais je ne peux faire l'appoint pour 100 francs. Combien ai-je en poche ?

SOLUTION de Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes)

Par hypothèse, je peux déposer 99 francs sur la table. S'il me reste alors des pièces, soit x la plus faible de leurs valeurs. Nécessairement x est >1 vu que je n'ai pas l'appoint de 100 francs. Or, au départ, je pouvais verser exactement $(x-1)$ francs en pièces qui sont maintenant sur la table puisque leur valeur est $<x$ francs. En les échangeant contre la pièce de x francs, je fais l'appoint de 100 francs : contradiction. En fait, il ne me reste aucune pièce et j'ai exactement 99 francs.

Autres solutions : André BELET (Rodez), Anne CAPDEVIELLE (Argenteuil), M. COLLOMBAT (Chambéry), Marie-Nicole GRAS (Brésilley), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noé), Christian RODRIGUEZ (Toulon), Pierrick VERDIER (Noyon), Valéry VERES (Amiens), et une réponse pour laquelle l'énoncé est mal compris.

Remarques :

1) Il s'agit d'une jolie idée, exploitable dès le collège, qui a pour origine des recherches menées par Jacques DIXMIER et Jean-Louis NICOLAS.

2) Il faut au minimum 13 pièces : neuf pièces de dix francs, une de cinq, une de deux, et deux de un franc ; et il faut au maximum 99 pièces (toutes de un franc). Observons de plus que dans ces deux cas la décomposition est unique pour toute somme inférieure ou égale à 99 francs, mais cette particularité est réalisée par d'autres partitions de 99.

3) L'énoncé se généralise immédiatement en remplaçant les entiers 100, 1, 2, 5, 10 par N, p_1, p_2,..., p_r avec $0<p_1<p_2<...<p_r<N$, et bien sûr, s'exprime sans inconvénient dans tout autre système monétaire.

ÉNONCÉ N° 138 (François COULOIGNER, Forges-les-Eaux)

Construire un point D dans le plan d'un triangle ABC donné, tel que A, B, C, D soient les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier.

SOLUTION de Robert CHARDARD (Les Ulis)

On appelle EFGH le tétraèdre régulier que l'on cherche, ABC étant la projection orthogonale de EFG.

La projection orthogonale du cercle (Γ) inscrit dans le triangle EFG est une ellipse tangente aux trois côtés du triangle ABC en leurs milieux :

le grand axe de cette ellipse représente l'une des directions du plan EFG.
O, le centre de (Γ), se projette sur G', isobarycentre du triangle ABC.

La droite (OH), perpendiculaire au plan du triangle EFG, est perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Elle se projettera donc sur le plan du triangle ABC suivant une droite passant par G', orthogonale à ce grand axe (projection orthogonale d'un angle droit dont l'un des côtés est parallèle au plan de projection).

Si on appelle α l'angle du plan ABC avec le plan EFG, on a :

$b = a\cos\alpha$ (b longueur du petit axe, a longueur du grand axe)

$$\begin{aligned} GD &= OH \sin\alpha \\ &= OH\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ &= OH\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = OH\,\frac{c}{a} \end{aligned}$$

On en déduit facilement, en exprimant OH et a en fonction de l'arête du tétraèdre, que : $G'D = 2\sqrt{2}c$.

On sait construire le centre et les foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle ABC en leurs milieux ; une construction a été décrite dans le *Bulletin* n° 360 (solution du problème n° 117, page 470). On en déduit facilement la construction demandée. Il y a en général deux solutions D_1 et D_2 ; voir figure 1, où l'on a repris les notations I, F_1, F_2, P, P' de la référence citée.

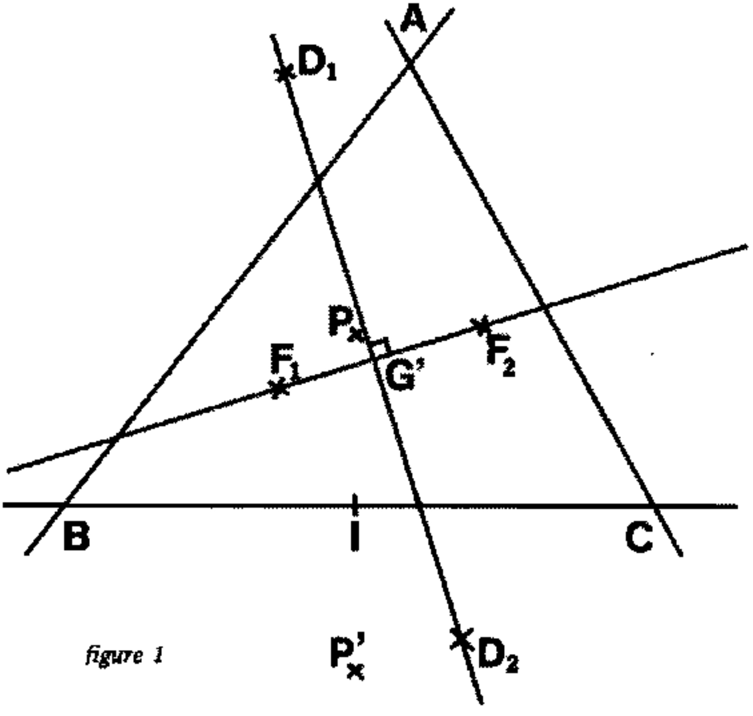

figure 1

Autres solutions : Michel BATAILLE (Rouen), François COULOIGNER (Forges-les-Eaux), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Jean ONIMUS (Auxerre).

Note : Une autre méthode consisterait à utiliser la propriété caractéristique suivante, qui ramène à la résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes :

$\mathbf{R}^3$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère quatre points du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ définis par leurs affixes U_k $(k=1, 2, 3, 4)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre points soient les projections orthogonales sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ des sommets d'un tétraèdre régulier est :

$$\Sigma\ (U_i - U_j)^2 = 0$$

ou, ce qui est équivalent :

$$4 \sum_{i=1}^{4} U_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{4} U_i \right)^2 = 0$$

Référence : problème de l'agrégation de mathématiques 1966, *Revue de Mathématiques spéciales,* 77^e année, page 538.

ÉNONCÉ N° 139 (Jean ONIMUS, Auxerre)

Résoudre dans **Q** l'équation : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$

SOLUTION (Jean LEMAIRE, Lille)

Quitte à multiplier les trois fractions x, y, z par un dénominateur commun, on peut supposer que x, y, z sont trois entiers rationnels non nuls. L'équation s'écrit :

$$x^2z + y^2x + z^2y = 0$$

soit : $-x^2z = y(yx+z^2)$, d'où : $-x^3z^3 = xyz^2(xy+z^2)$.

Soit d le PGCD de xy et z^2. $xy = ad$, $z^2 = bd$ où a et b sont deux nombres premiers entre eux.

Comme $-x^3z^3 = d^3ab(a+b)$, l'entier $ab(a+b)$ est un cube. a, b, $a+b$ étant des nombres premiers entre eux deux à deux, il en résulte que chacun d'eux est un cube, ce qui conduit à une équation du type $X^3+Y^3=Z^3$, pour laquelle on sait qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbf{Z}-\{0\}$ (théorème de FERMAT pour $n=3$). En conclusion, l'équation proposée n'a aucune solution dans **Q**.

Autres solutions : Robert CHARDARD (Les Ulis), Marie-Nicole GRAS (Brésilley), Georges GRAS (Brésilley), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Jean ONIMUS (Auxerre), Pierre SAMUEL (Orsay), et une solution fausse.

Commentaire : Ceci complète la démonstration de la proposition énoncée pages 524 et 525 du *Bulletin* n° 349, qui est donc exacte même pour $d=0$, à condition d'omettre l'assertion e).

Compléments :

Deux lecteurs donnent des démonstrations qui permettent d'étendre le résultat :

1) Georges GRAS démontre, par une méthode de "descente infinie", que l'équation plus générale $a^3x^2z+b^3y^2x+c^3z^2y=0$ n'a pas de solution pour a, b, c, x, y, z dans $\mathbf{Z}-\{0\}$.

2) Pierre SAMUEL communique le résultat suivant relatif à l'équation homogène $xy^n + yz^n + zx^n = 0$ $(n \geqslant 2)$ de la courbe dite "de Klein". Pour tout nombre premier p divisant l'un de ses 3 termes (et alors tous), il existe un entier $s(p) \geqslant 1$ tel que les exposants de p dans xy^n, yz^n, zx^n *soient, à permutation près* $(ns(p), ns(p), (n^2+1)s(p))$. En posant $N = n^2 - n + 1$, on ramène cette équation diophantienne à l'équation de FERMAT $X^N + Y^N + Z^N = 0$.

COURRIER DE LECTEURS

1) *Solutions parvenues au responsable de la rubrique après rédaction de celle-ci.*

Régis CHARPENTIER (Fontainebleau) : N° 134, 135, 136.
Jean LEMAIRE (Lille) : N° 135.
François LO JACOMO (Paris) et Charles NOTARI (Noé) : N° 133.

2) François LO JACOMO a fait tourner les ordinateurs à la recherche des solutions du problème n° 133, et nous communique un volumineux travail (plus de 300 pages), dont voici la conclusion, qui confirme et prolonge les résultats publiés dans le Bulletin n° 365.

43 SOLUTIONS DU PROBLÈME HISTORIQUE

Trouver trois entiers A, B, C tels que :

$$A + B = t^2 \qquad A - B = x^2$$
$$A + C = v^2 \qquad A - C = u^2$$
$$B + C = z^2 \qquad B - C = y^2$$

donc : $x^2 + y^2 = u^2$
$x^2 + z^2 = v^2$

et : $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

avec :

A > B > C > 0
x, y, z, u, v, t entiers
PGCD(A,B,C) = PGCD(x,y,z) = PGCD(u,v,t) $\leqslant 2$

Les 43 solutions qui suivent ne sont pas obligatoirement les 43 plus petites, mais, en principe, il ne doit pas y avoir d'autres solutions vérifiant A < 400 000 000.

Aucune n'est solution du problème du cuboïde (c'est-à-dire ne vérifie en outre : $y^2 + z^2 = w^2$, avec w entier).

x	y	z		A	B	C
117	520	756	1	434 657	420 968	150 568
495	264	952	2	733 025	488 000	418 304
208	306	1 344	3	993 250	949 986	856 350
333	644	2 040	4	2 399 057	2 288 168	1 873 432
896	528	1 950	5	2 843 458	2 040 642	1 761 858
1 680	896	990	6	3 713 858	891 458	88 642
1 680	1 092	1 540	7	5 320 193	1 782 032	589 568
1 771	1 428	2 640	8	7 640 833	4 504 392	2 465 208
399	468	4 180	9	9 004 913	8 845 712	8 626 688
3 627	840	1 364	10	14 438 177	1 283 048	577 448
504	4 522	5 280	11	24 417 458	24 163 442	3 714 958
1 512	1 066	6 720	12	25 433 522	23 147 378	22 011 022
3 360	3 850	4 104	13	27 122 258	15 832 658	1 010 158
3 360	1 638	7 480	14	40 606 322	29 316 722	26 633 678
1 827	1 564	8 736	15	42 719 825	39 381 896	36 935 800
5 280	4 550	5 544	16	53 597 618	25 719 218	5 016 718
4 389	2 548	8 352	17	57 387 425	38 124 104	31 631 800
5 605	2 772	7 800	18	65 678 017	34 261 992	26 578 008
3 864	5 760	8 602	19	68 516 498	53 586 002	20 408 402
3 360	6 808	9 306	20	77 764 850	66 475 250	20 126 386
4 991	1 512	10 488	21	81 052 225	56 142 144	53 856 000
2 552	714	13 920	22	103 650 802	97 138 098	96 628 302
4 704	10 472	14 022	23	175 267 250	153 139 634	43 476 850
11 704	1 722	13 728	24	232 695 250	95 711 634	92 746 350
6 248	9 114	19 680	25	274 221 202	235 183 698	152 118 702
8 064	13 202	17 952	26	313 311 650	248 283 554	73 990 750
9 576	7 840	21 318	27	349 661 138	257 961 362	196 495 762
3 168	2 730	28 424	28	417 724 562	407 688 338	400 235 438
12 672	10 920	20 746	29	435 401 042	274 821 458	155 575 058
5 888	7 134	33 600	30	624 595 522	589 926 978	539 033 022
15 400	18 810	21 216	31	639 127 378	401 967 378	48 151 278
17 472	4 810	25 704	32	647 186 642	341 915 858	318 779 758
16 416	18 810	20 440	33	655 289 906	385 804 850	31 988 750
6 552	14 586	32 800	34	687 224 402	644 295 698	431 544 302
7 920	15 232	32 190	35	696 831 362	634 104 962	402 091 138
29 640	3 904	9 450	36	930 801 458	52 271 858	37 030 642
18 200	19 110	30 624	37	982 750 738	651 510 738	286 318 638
24 288	19 584	20 930	38	1 000 705 922	410 798 978	27 265 922
22 176	19 110	27 880	39	1 063 018 226	571 243 250	208 051 150
21 840	18 304	32 130	40	1 160 672 258	683 686 658	348 650 242
2 728	29 946	42 240	41	1 347 932 242	1 340 490 258	443 727 342
18 304	26 928	38 850	42	1 452 256 268	1 117 219 842	392 102 658
27 072	30 160	35 154	43	1 806 607 842	1 072 714 658	163 089 058

3) Samuel BOUREAU (Châlons-sur-Marne) propose plusieurs réponses à la question posée par Eugène EHRHART page 390 du *Bulletin* n° 364 : "Un polyèdre convexe inscrit et circonscrit à deux sphères concentriques est-il nécessairement régulier ?".
Voici des *contre-exemples* :

a) Un prisme droit régulier de hauteur égale au diamètre du cercle inscrit au polygone de base (figure 2).

b) L'intersection d'un cube et d'un octaèdre régulier circonscrits à une même sphère et possédant les mêmes axes de symétrie.

De même on peut considérer l'intersection d'un dodécaèdre régulier et d'un icosaèdre régulier.

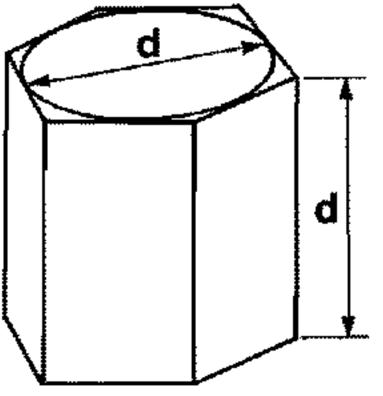

figure 2

c) Un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux (figure 3).

Dans ce dernier cas il se peut que le centre de la sphère circonscrite soit à l'extérieur du tétraèdre, il existe bien une sphère de même centre "inscrite" au tétraèdre en ce sens qu'elle est tangente aux quatre plans définis par ses faces.

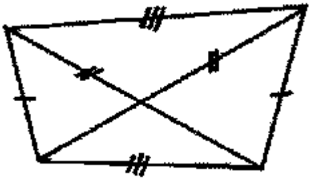

figure 3

Ce dernier exemple est justifié par la remarque suivante : Si un polyèdre convexe est inscrit dans une sphère, alors chacune de ses faces est inscrite dans un cercle, si, de plus, les cercles circonscrits à chaque face ont même rayon, alors il s'agit d'un polyèdre inscrit et circonscrit à deux sphères concentriques.

4) Enfin Marcel KRIER (Strasbourg) nous écrit :

Le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. a publié récemment une question (n° 121) à propos d'une équation résoluble par radicaux. La solution parue (*Bulletin* n° 361) m'a très intéressé, et je me suis en particulier arrêté à la remarque de l'auteur, selon laquelle "la résoudre effectivement serait une autre affaire". Effectivement, c'est très laborieux.

Voici, à titre de curiosité, et sans démonstration, la suite des calculs à effectuer pour obtenir une expression algébrique des racines de l'équation

$$(E)\ t^5 + (2-m)t^4 + (1-m-p)t^3 + (m^2-p)t^2 + (2m^2+m)t + m^2 = 0$$

1° Posons $T = t+\lambda$ avec $\lambda = \dfrac{2-m}{5}$

L'équation (E) est transformée en

$$T^5 + 10PT^3 + 10QT^2 + 5RT + S = 0$$

où les coefficients P,Q,R et S se calculent facilement.

2° Introduisons les quantités suivantes :

$$U = P+\lambda^2-3\lambda+1$$

$$V = \left(\lambda-\frac{3}{2}\right)U+\frac{5}{2}P$$

$$g = -P + \frac{U}{\sqrt{5}}$$

$$h = -Q - \frac{V}{\sqrt{5}}$$

$$j = \frac{1}{2}\left(P^2-R+\frac{3}{5}U^2\right) + \frac{\sqrt{5}}{2U}\left\{\frac{V^2-3PU^2}{5} - (P^3+Q^2-PR)\right\}$$

$$k = \frac{1}{P+\dfrac{U}{\sqrt{5}}}\left(\frac{g^2V}{\sqrt{5}} - g^2Q - hj\right)$$

3° Soient m_1, m_2, m_3 et m_4 quatre nombres satisfaisant au système

$$m_1 m_4 = g \qquad m_1^2 m_2 + m_3 m_4^2 = h$$

$$m_1^5 + m_4^5 = k \qquad m_1^3 m_3 + m_2 m_4^3 = j$$

Les racines de l'équation (E) sont :

$$t_j = -\lambda+\omega^j m_1 + \omega^{2j}m_3 + \omega^{3j}m_2 + \omega^{4j}m_4 \quad (j=1,2,3,4,5)$$

où ω est solution de $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$.

4° Dans cette suite de formules, le point crucial est l'expression de U (et celle de V).

Il y a quelques cas particuliers (U = 0, etc.) où ces formules ne s'appliquent pas directement.

Note : Je n'ai pas vérifié cet algorithme (D. ROUX).