études

compter et mesurer en fibonaccien

par Louis Mordefroid

> ***"La géométrie donne à voir, domaine de l'intuition ; l'algèbre donne à parler ou écrire, elle est le terrain du discours. Ces deux variétés ont un voisinage commun, échangeur par où elles coulent de l'une à l'autre, le point de référence, lieu sans lieu mais lieu des lieux, zéro de la mesure et du logos mais origine et possibilité de la parole et de l'écrit sur les phénomènes du lieu".***
>
> ***Michel SERRES***

Compter, calculer dans le monde des suites fibonacciennes, à partir de la suite de Fibonacci elle-même : ce propos pourrait n'être d'abord qu'un exercice de calculs élémentaires, mais il est plus précisément un paragraphe, un extrait d'une géométrie des nombres où l'on découvre qu'il y a analogie de mesure des distances, des aires entre le classique quadrillage euclidien orthonormé et une lecture qui "compte" à la manière de Fibonacci.

Préliminaire fondamental

Tout cet exposé n'utilisera que les entiers naturels mais les calculs peuvent être étendus à d'autres ensembles de nombres.

a) *A partir d'un quadrillage,* par exemple dans un repère orthonormé, on attribue à chaque nœud la somme de ses coordonnées : c'est une manière de repérer ce point par la longueur des cheminements à sens uniques (de gauche à droite ou de bas en haut) qui conduisent de l'origine à lui. Dans la figure n° 0, tous les cheminements qui vont de l'origine

O au point A (9;6) mesurent 15 et tous les points du segment dont les extrémités sont ceux de coordonnées (15;0) et (0;15) sont affectés du même nombre 15.

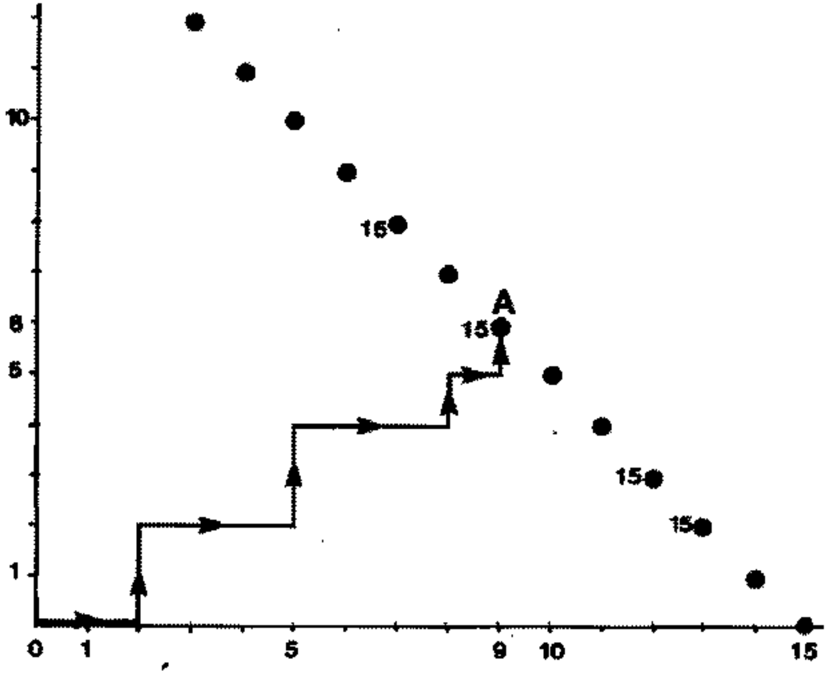

figure n° 0

b) *Aire d'un rectangle à côtés parallèles aux axes*

Aux points disposés comme l'indique la figure n° 1, on associe donc les nombres suivants :

points	coordonnées	somme des coordonnées
M	$(p\ ;\ q)$	$p+q=n$
R	$(p+k\ ;\ q)$	$p+k+q=n+k$
S	$(p\ ;\ q+k')$	$p+q+k'=n+k'$
N	$(p+k\ ;\ q+k')$	$p+k+q+k'=n+k+k'$

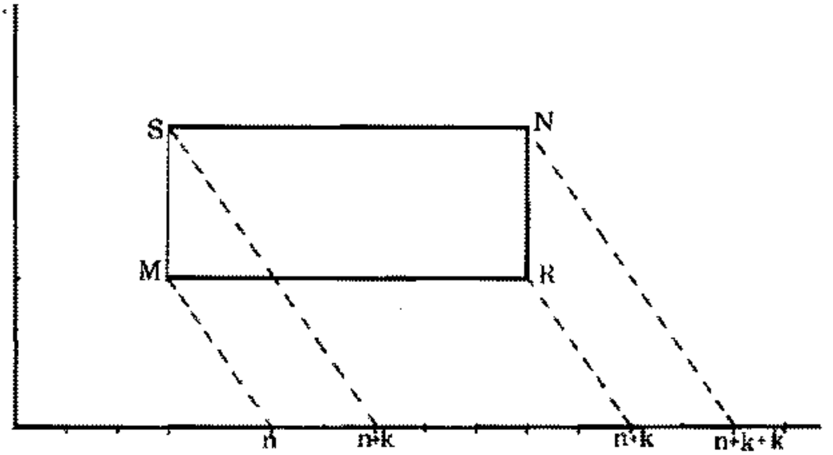

figure n° 1

On a, à l'évidence, la relation suivante :

$$\boxed{(n+k)(n+k') - n(n+k+k') = kk'}$$

qui donne deux expressions de l'aire du rectange (M,R,N,S) :
- d'une part la différence des "produits en croix"
- d'autre part le produit de ses dimensions.

Tout carreau unitaire correspond à :

$$(n+1)^2 - n(n+2) = 1 .$$

Première extension à titre de conjecture : la suite de Fibonacci

Est-il besoin de rappeler la définition de cette suite : a_n ?

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n .$$

Soit :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12.....
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144.....

Tant pour graduer le repère que pour repérer chaque point, on remplace dans le quadrillage précédent chaque naturel par le terme correspondant de la suite de Fibonacci.

Ce premier exemple sera le cas le plus simple et en même temps le fondement de l'utilisation d'une suite fibonaccienne quelconque.

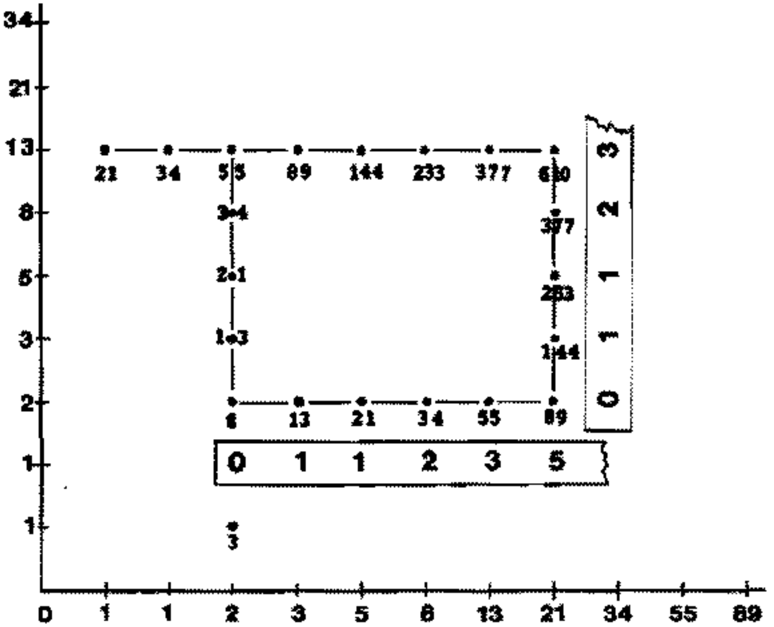

figure n° 2

La figure n° 2 suggère la relation généralisée que permet de conjecturer le résultat précédent.

Comparer : $a_{6+5} \times a_{6+4} - a_6 \times a_{6+5+4}$ et $a_5 \times a_4$

$89 \times 55 - 8 \times 610$ et 5×3

Y aurait-il égalité entre :

$$a_{n+k} \times a_{n+k'} - a_n \times a_{n+k+k'} \text{ et } a_k \times a_{k'} \text{ ?}$$

Ainsi avec une règle, graduée selon la suite de Fibonacci, on mesure les "dimensions" du rectangle ; le résultat de calculs analogues aux précédents semblerait vérifié !! Mais cela n'est que conjectural.

Deuxième extension : une suite fibonaccienne quelconque

On remplace les suites précédentes par une suite fibonaccienne : f_n.

a) *Dimension 1 : définition*

• une suite fibonaccienne est définie par : f_0, f_1 et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;

• elle se construit sur celle de Fibonacci : il est facile de l'établir par récurrence à cause de la linéarité de la définition :

$f_1 = a_0 f_0 + a_1 f_1$ puisque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$

$f_2 = a_1 f_0 + a_2 f_1$ puisque $a_1 = a_2 = 1$

d'où $f_3 = a_2 f_0 + a_3 f_1$ par addition

etc... $f_k = a_{k-1} f_0 + a_k f_1$

• ou encore, la même suite pouvant être considérée comme initialisée à f_n et f_{n+1}, il est clair que l'on obtient par le même raisonnement :

$$\boxed{f_{n+k} = a_{k-1} f_n + a_k f_{n+1}} \qquad (1)$$

b) *Dimension 2 : calcul d'"aires"*

• Il est une propriété fondamentale bien connue, quant aux suites fibonacciennes : la quantité $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}$ est constante en valeur absolue et prend successivement des valeurs opposées. La démonstration est élémentaire : pour quatre nombres se succédant suivant la loi définissant la suite fibonaccienne : x ; y ; $x+y$; $x+2y$

$$y^2 - x(x+y) = y^2 - xy - x^2$$
$$(x+y)^2 - y(x+2y) = x^2 + xy - y^2$$

les deux résultats sont opposés.

Pour une suite fibonaccienne, on posera donc : $f_1^2 - f_0 f_2 = u$; on verra se justifier le sens unitaire de cette quantité u qui peut être négative. Et l'on a alors :

$$\boxed{f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} = (-1)^{n+1} u} \qquad (2)$$

N.B. : Pour la suite de Fibonacci, $u = 1$ et $a_n^2 - a_{n+1} a_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

• Par analogie avec les résultats des deux parties précédentes, on calcule l'"aire" d'un rectangle à côtés parallèles aux axes. Dans ce nouveau repérage où les termes d'une suite fibonaccienne quelconque remplacent les précédents, nous utiliserons la même règle graduée selon la suite de Fibonacci et nous procèderons en deux étapes :

1°) *"Dimensions" du rectangle :* a_k et $a_1 = 1$

$$\begin{array}{lcl} f_{n+1} & \text{———} & f_{n+k+1} \\ f_n & \text{———} & f_{n+k} \end{array}$$

Soit à calculer : $f_{n+k} \times f_{n+1} - f_n \times f_{n+k+1}$.

D'après (1), cette expression est égale à :

$$\begin{aligned} (f_n a_{k-1} + f_{n+1} a_k)\, f_{n+1} - f_n(f_n a_k + f_{n+1} a_{k+1}) &= \\ f^2_{n+1} a_k - f_n f_{n+1}\,(a_{k+1} - a_{k-1}) - f_n^2 a_k &= \\ a_k\,(f^2_{n+1} - f_n f_{n+1} - f_n^2) &= \\ a_k\,(f_{n+1}\, f_{n-1} - f_n^2) &= \end{aligned}$$

d'après (2) : $a_k \times (-1)^n u$.

Conclusion : Qui permet déjà d'entrevoir l'analogie avec les calculs d'aires :

$$\boxed{f_{n+1} f_{n+k} - f_n f_{n+k+1} = (-1)^n a_k u} \qquad (3)$$

2°) *"Dimensions" du rectangle :* a_k et $a_{k'}$. C'est le cas général :

$$\begin{array}{lcl} f_{n+k'} & \text{———} & f_{n+k+k'} \\ | & & | \\ f_n & \text{———} & f_{n+k} \end{array}$$

Soit à calculer : $f_{n+k} \times f_{n+k'} - f_n \times f_{n+k+k'}$.

D'après (1), cette expression est égale à :

$$\begin{aligned} (f_n a_{k-1} + f_{n+1} a_k)\, f_{n+k'} - f_n(f_{n+k'} a_{k-1} + f_{nk'+1} a_k) &= \\ a_k\,(f_{n+1} f_{n+k'} - f_n f_{n+k'+1}) &= \end{aligned}$$

d'après (3) : $(-1)^n a_k a_{k'} u$.

Conclusion : f_n étant une suite fibonaccienne quelconque et a_n la suite de Fibonacci, on a :

$$\boxed{f_{n+k} f_{n+k'} - f_n f_{n+k+k'} = (-1)^n a_k a_{k'} u} \qquad (4)$$

C'est une transposition de la relation préliminaire fondamentale. A noter que pour la suite de Fibonacci, la conjecture proposée doit être précisée : $a_{n+k}\, a_{n+k'} - a_n a_{n+k+k'} = (-1)^n a_k a_{k'}$.

Exemple numérique, à titre d'illustration :

Les données : une suite fibonaccienne : $f_0 = 5$, $f_1 = 9$

donc $\quad u = 11$

on prend $\quad n = 5$, $k = 7$, $k' = 6$

c'est-à-dire $\quad a_7 = 13$, $a_6 = 8$

$f_5 = 60$, $f_{12} = 1741$, $f_{11} = 1076$.

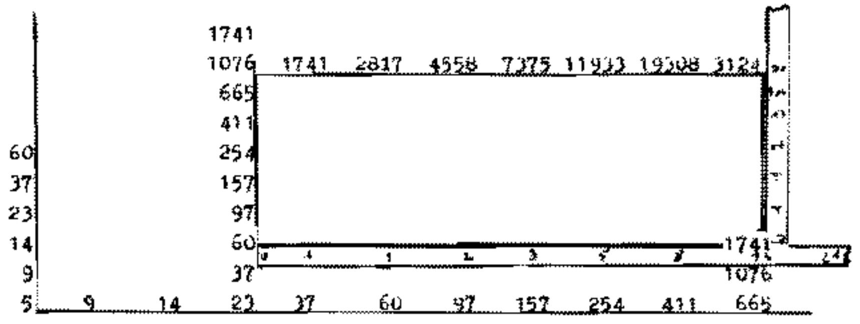

figure n° 3

La différence des produits en croix :

$$1741 \times 1076 - 60 \times 31241$$
$$1873316 - 1874460$$
$$-1144$$

L'aire algébrique du rectangle mesurée "selon Fibonacci" :

$$(-1)^5 \times 13 \times 8 \times 11$$
$$(-1) \times 104 \times 11$$
$$-1144$$

Conclusion

Dans le monde orthonormé :

$$(n+k)(n+k') - n(n+k+k') = kk'$$

Dans le monde de la suite fibonaccienne, "mesurée" selon Fibonacci :

$$f_{n+k} \times f_{n+k'} - f_n \times f_{n+k+k'} = (-1)^n a_k \times a_{k'} \times u \ .$$

Ainsi la suite de Fibonacci sert de base pour les mesures de "distances" et d'"aires" dans un ensemble repéré par une suite fibonaccienne. C'est tout ce que l'on voulait manifester entre la relation initiale dans $\mathbf{N}^2$ et la relation (4).

Réciproquement, on peut utiliser ces calculs pour déterminer les termes de la suite fibonaccienne :

de f_n à f_{n+k} , par (1)

et de f_n à $f_{n+k+k'}$, par (4)

De même on pourra s'essayer à calculer f_{kn} à partir de f_n . Les formules ont quelque analogie avec les précédentes mais sont plus "maniables" si on utilise la suite de Lucas...

D'ailleurs tout ceci nous ouvre à une géométrie des nombres, à une étude de visibilité, voisinage des points d'un quadrillage, et permet une investigation plus fractale que classique... à suivre, en somme.