concours général

session 1989

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classes terminale C et terminale E)

Durée : 5 heures

La calculatrice électronique de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les cinq exercices sont indépendants.

EXERCICE I

On se donne une partie B du plan et l'on considère les parties A du plan contenant B et possédant la propriété (P) :

« toute composée d'un nombre impair de symétries centrales de centres appartenant à A est une symétrie centrale dont le centre appartient aussi à A. »

Plus précisément, on se propose de déterminer la plus petite de ces parties, que l'on notera $\mathcal{A}$, c'est-à-dire celle qui est contenue dans chacune des parties A.

1. Déterminer la partie $\mathcal{A}$ lorsque la partie B donnée est formée :
   a. De deux points distincts I et J.
   b. De trois points non alignés I, J et K.
2. Déterminer la partie $\mathcal{A}$ lorsque la partie B est un cercle de rayon non nul.
3. Donner plusieurs exemples de parties B telles que les parties $\mathcal{A}$ associées soient distinctes entre elles et différentes des précédentes.

EXERCICE II

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que :

$$z_1 . z_2 = 1 \quad \text{et} \quad |z_1 - z_2| = 2.$$

On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixe respective -1, 1, z_1 et z_2.

Montrer que le quadrilatère AM_1BM_2 est en général un trapèze isocèle dont on calculera la longueur des côtés non parallèles.

Préciser les cas particuliers.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit O_1 et O_2 deux points distincts du plan et (C_1), (C_2) les cercles de centres O_1, O_2 et de rayon $d\sqrt{2}$, où $2d$ désigne la longueur O_1O_2.

Deux points mobiles P et Q se déplacent respectivement sur les cercles (C_1) et (C_2) de façon que :

— $PQ = 2d$;
— les points P et Q sont soit sur la droite (O_1O_2) soit de part et d'autre de (O_1O_2).

Démontrer que le milieu I du segment [PQ] décrit une ligne de niveau de l'application $f : M \mapsto MO_1 \cdot MO_2$ lorsque P décrit le cercle (C_1).

EXERCICE III

Déterminer le plus grand nombre réel k tel que, pour tout tétraèdre ABCD de volume V, le produit des aires des faces ABC, ABD et ACD soit supérieur ou égal à kV^2.

EXERCICE IV

n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres entiers naturels non nuls. Pour k, nombre entier compris au sens large entre 2 et n, on définit le nombre entier $[x_k ; x_{k-1} ; \ldots ; x_1]$ par récurrence sur k en posant :

$$[x_2 ; x_1] = x_2^{x_1} ;$$

$$\text{si } k \geqslant 3, \quad [x_k ; x_{k-1} ; \ldots ; x_2 ; x_1] = x_k^{[x_{k-1} ; x_{k-2} ; \ldots ; x_1]}$$

Par exemple :

$$[a ; b ; c] = a^{(b^c)}.$$

Les deux questions sont indépendantes.

Question 1.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres entiers distincts rangés dans l'ordre croissant et supérieurs ou égaux à 3, c'est-à-dire :

$$3 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Pour s, permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose :

$$P(s) = [a_{s(n)} ; a_{s(n-1)} ; \ldots ; a_{s(2)} ; a_{s(1)}].$$

Pour quelle permutation s, $P(s)$ est-il minimum ?

Pour quelle permutation s, $P(s)$ est-il maximum ?

On étudiera d'abord le cas de $n = 2$ puis celui de $n = 3$.

Question 2.

Déterminer les nombres entiers a, b, c, d supérieurs ou égaux à 2 tels que :

$$[178 ; 9] \leqslant [a ; b ; c ; d] \leqslant [198 ; 9].$$

EXERCICE V

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres réels strictement positifs.
On pose :

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k ;$$

$$s' = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^{1-\frac{1}{k}} .$$

1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1.
   Établir l'inégalité :

$$s' < \lambda s + \frac{\lambda}{\lambda - 1} .$$

2. En déduire l'inégalité :

$$\sqrt{s'} < \sqrt{s} + 1 .$$