la classe de math au jour le jour

Si vous avez réussi, avec vos élèves, un cours, une séance de T.D. ou d'exercices, si vos élèves ont particulièrement bien réagi à un problème, une situation, envoyez-nous un compte rendu détaillé de votre activité en précisant la classe, le thème, le contenu précis et, si vous le souhaitez, les réactions de vos élèves, les vôtres, comment vous avez, ensuite, exploité les résultats. Si chacun envoie une idée, on pourra faire tout un livre !

Envoyez vos idées et aussi vos questions à :

Christiane MORIN
128, rue Font Del Mazet
34830 Clapiers

rapidité de convergence d'une suite

par Gérard Clément
Lycée d'altitude, Briançon

But

Présenter en TC, sur un exemple, l'importance de la notion de vitesse de convergence d'une suite.

Activité

C'est une partie d'un devoir pour lequel les élèves disposent d'une semaine. Puis, il y a un prolongement en classe lors de la correction.

Réactions des élèves

Habitués à ce que leur calculatrice donne un résultat instantané, ils s'étonnent du temps mis par leur calculatrice et certains n'attendent pas le temps nécessaire. Ils interrompent le calcul en pensant avoir commis une erreur de programmation.

Sujet

Le but de cette activité est, dans la partie A, d'étudier la convergence d'une suite S et de déterminer une valeur approchée de la limite L. La convergence étant lente, dans la partie B, on utilise une méthode d'accélération de la convergence.

Soit S la suite définie par $\forall\, p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2\quad S_p = \sum_{n=2}^{p} x_n$ avec $x_n = \frac{1}{n^2}$

Partie A

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2$ on a : $x_n \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2) a) Etablir que $\forall p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2$ on a : $0 \leqslant S_p \leqslant 1 - \frac{1}{p}$.

b) En déduire que S converge, soit L sa limite.

3) a) Soit $p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2,\ q \in \mathbf{N},\ q > p$. Etablir que $0 \leqslant S_q - S_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

b) En déduire que $0 \leqslant L - S_p \leqslant \frac{1}{p}$.

c) Déterminer p tel que S_p soit une valeur approchée de L à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Partie B

Soit u et y les suites définies par $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$ et $y_n = u_n - u_{n+1}$.

1) Soit $n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2$.

a) Etablir que : $x_n - y_n = \frac{1}{2n^2(n+1)^2}$ et en déduire que

$$0 \leqslant x_n - y_n \leqslant \frac{1}{2n^4}.$$

b) Etablir que : $\frac{1}{n^4} \leqslant \int_{n-1}^{1} t^{-4}\, dt$ et en déduire que

$$0 \leqslant x_n - y_n \leqslant \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(n-1)^3} - \frac{1}{n^3}\right].$$

2) Soit T la suite définie par $\forall p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2,\ T_p = \sum_{n=2}^{p} (x_n - y_n)$.

a) Démontrer que $\forall p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2$, on a $T_p = S_p - u_2 + u_{p+1}$.

b) En déduire que T converge vers $L - u_2$.

3) a) Soit $p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2,\ q \in \mathbf{N},\ q > p$. Etablir que

$$0 \leqslant T_q - T_p \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right).$$

b) En déduire que $0 \leqslant L - u_2 - T_p \leqslant \frac{1}{6p^3}$, puis que

$$0 \leqslant L - (S_p + u_{p+1}) \leqslant \frac{1}{6p^3}.$$

c) Déterminer p tel que $S_p + u_{p+1}$ soit une valeur approchée de L à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Prolongement

Lors de la correction en classe, on mesure le temps mis par les calculatrices pour donner une valeur approchée de L à 10^{-4} près, par chacune des méthodes. (Avec une Casio 4000, environ 10 minutes et 40 secondes par la première méthode et moins d'une seconde par la deuxième méthode).

Ensuite, je propose d'évaluer les temps nécessaires pour obtenir une valeur approchée de L à 10^{-6} près, par chaque méthode. Ceci à partir du temps mis pour les 10.000 itérations précédentes. Par la première méthode il faut alors calculer S_p avec $p > 10^6$ et pour la seconde $S_p + u_{p+1}$ avec $6p^3 > 10^6$, soit $p \geqslant 56$. Ce qui permet d'évaluer à 17h45 le temps nécessaire pour la première méthode et à moins de 4 secondes pour la deuxième.

Remarques

1) La vitesse de convergence de la première suite est de l'ordre p^{-1}, tandis que pour la seconde suite elle est de l'ordre de p^{-3}.

2) $L = \dfrac{\pi^2}{6} - 1$.

3) Exemple de programmes pour les Casio 4000, 7000G et 8000G.

Partie A :
$1 + 10^4 \rightarrow N$: $0 \rightarrow S$: Lb1 0: $S + 1 \div N^2 \rightarrow S$: Dsz N: Goto 0: $S - 1$

Partie B :
$12 \rightarrow N$: $N + 1 \rightarrow P$: $P^{-1} + (2P^{9} +)^{-1} \rightarrow S$: Lb1 0: $S + 1 \div N^2 \rightarrow S$: Dsz N: Goto 0: $S - 1$