Bulletin de l'APMEP n°366 - Décembre 1988

les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 149 (François LO JACOMO, Paris)

Pour tout tétraèdre on désigne par R le rayon de la sphère circonscrite et par r le rayon de la sphère inscrite. Quel est le minimum de $\frac{R}{r}$?

ÉNONCÉ N° 150 (Olympiades 1987)

Existe-t-il un ensemble infini de points du plan tel que la distance de deux quelconques d'entre eux soit irrationnelle, et tel que chaque triplet de points détermine un triangle dont l'aire soit un rationnel non nul ?

ÉNONCÉ N° 151 (Dominique ROUX, Limoges)

Trouver tous les couples de rationnels positifs (x,y) tels que $x^y - y^x = 1$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 134 (Jean-Pierre TISO, Besançon)

Démontrer que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n sous-groupes d'un groupe G, $H = A_1A_2\ldots A_n$ est un sous-groupe de G si et seulement si

$$A_1H = A_2H = \ldots = A_nH .$$

SOLUTION de Georges GRAS (Brésilley)

Conservons le caractère ensembliste proposé par l'énoncé (par exemple $H^{-1}H$ désigne $\{x^{-1}y,\ x,y \in H\}$) ; notons e le neutre de G. Puisque $A_1H = H$, il est en fait demandé de prouver que H est un sous-groupe de G si et seulement si $A_iH = H$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$:

(i) Supposons que H soit un sous-groupe de G ; comme $A_1,\ldots,A_n$ contiennent e, on a d'une part $A_i = \{e\}\ldots A_i\ldots\{e\} \subseteq H$ (qui conduit à $A_iH \subseteq H$) et d'autre part $H = \{e\}H \subseteq A_iH$; d'où $A_iH = H$ pour tout i.

(ii) Si $A_iH = H$ pour tout i, pour toute famille d'indices $i_1,\ldots i_m \in \{1,\ldots,n\}$, on a $A_{i_1}\ldots A_{i_m}H = H$. Or H est non vide (car les A_i sont non vides), et $H^{-1}H = (A_1\ldots A_n)^{-1}H = A_n^{-1}\ldots A_1^{-1}H = A_n\ldots A_1H = H$; d'où le résultat classiquement.

Remarque :

On vient en fait de démontrer la propriété plus forte suivante : Si $A_1,\ldots,A_n$ sont n parties d'un groupe G, contenant e et symétriques, alors $H = A_1\ldots A_n$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A_iH = H$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Autres solutions :

Jacques AMON (Angoulême), André ANGLÈS (Limoges), Luc BARRIA (Serres Morlaas), André BELET (Rodez), Jean-Claude CARREGA (Lyon), Robert CHARDARD (Les Ulis), D. et R. FERREOL (Paris), Pierre KAPLAN (Saulxures-lès-Nancy), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes), Thierry LEGAY (Paris), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), Georges PIAN (Rennes), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), Marc SERAY (Woustviller), Jean-Pierre TISO (Besançon), Valéry VERES (Amiens) et aussi une autre réponse, sans référence.

ÉNONCÉ N° 135 (Robert CHARDARD, Les Ulis)

Quels sont les entiers n pour lesquels 2^n+1 est somme de deux carrés ?

SOLUTION de Marie-Nicole GRAS (Brésilley)

Les entiers n pairs conduisant à une solution triviale, on suppose désormais n impair.

On utilise le résultat classique suivant : soit $x \in \mathbf{N}^*$ et soit $x = \prod_{p|x} p^{v_p(x)}$ sa décomposition primaire ; pour que x soit somme de deux carrés, il faut (et il suffit) que pour tout $p \equiv 3 \bmod 4$ l'exposant $v_p(x)$ soit pair (cf. Pierre SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres* (Hermann), chap. V, §6, th. 1).

Puisque $2^6 \equiv 1 \bmod 9$, on obtient facilement :

(i) si $n \equiv 1 \bmod 6$, alors $2^n+1 \equiv 3 \bmod 9$,

(ii) si $n \equiv 3 \bmod 6$, alors $2^n+1 \equiv 0 \bmod 9$,

(iii) si $n \equiv 5 \bmod 6$, alors $2^n+1 \equiv 6 \bmod 9$.

Donc, dans les cas (i) et (iii), 2^n+1 , qui est divisible par 3 et non par 9, n'est pas somme de deux carrés.

On suppose maintenant que $n = 6k+3$, $k \geqslant 0$.

On a
$$2^n+1 = (2^{2k+1})^3+1 = (2^{2k+1}+1)(2^{4k+2}-2^{2k+1}+1)$$
$$= (2.4^k+1)((2.4^k+1)(2.4^k-2)+3) .$$

Comme $2.4^k+1 \equiv 0 \bmod 3$, on peut poser $2.4^k+1 = 3m$, $m \geqslant 1$; d'où
$$2^n+1 = 9m\,(3m(m-1)+1) .$$

On étudie m modulo 4 dans la relation $3m = 2.4^k+1$; le cas $k=0$ est donc particulier :

(i) si $k=0$ (c'est-à-dire $m=1$), alors $2^n+1=9$ est somme de deux carrés.

(ii) si $k \geqslant 1$, alors on a $m \equiv 3 \bmod 4$: il existe donc p premier, $p \equiv 3 \bmod 4$, qui divise m à une puissance impaire ; comme $(m, 3m^2-3m+1) = 1$ et que 9 est un carré, p divise 2^n+1 à une puissance impaire, et donc ce dernier n'est pas somme de deux carrés.

En conclusion, 2^n+1 *est somme de deux carrés si et seulement si* n *est pair ou* $n=3$.

Autres solutions :

Richard ANDRÉ-JEANNIN (Sfax, Tunisie), André ANGLÈS (Limoges), Henry COQUILLE (Genève), Edgard DELPLANCHE (Maison-Alfort), Pierre KAPLAN (Saulxures-lès-Nancy), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), Pierre SAMUEL (Orsay), l'auteur et une réponse sans référence.

Compléments dûs à Pierre SAMUEL (Orsay)
sur les diviseurs premiers des nombres 2^n+1 *(n impair).*

Théorème. — *Soient* p *un nombre premier impair et* G *le sous-groupe multiplicatif des puissances de 2 dans le corps* $F_p = Z/pZ$. *Pour que* p *divise l'un des* 2^n+1, *(n impair), il faut et il suffit que l'ordre de* G *soit de la forme* $2q(p)$, *avec* $q(p)$ *impair ; alors* n *est de la forme* $(2k+1)q(p)$ *et* $2q(p)$ *divise* $p-1$. *Les nombres premiers qui vérifient cette condition sont :*

a) tous ceux qui sont congrus à 3 *modulo* 8 ;

b) certains de ceux qui sont congrus à 1 *modulo* 8 .

Comme $-1 \equiv 2^n$ (mod. p), G doit contenir -1, donc est d'ordre pair $2q$, avec $-1 \equiv 2^q$ (mod. p) et $1 \equiv 2^{2q}$ (mod. p) . De $2^n \equiv 2^q$, on déduit $2^{n-q} \equiv 1$, d'où $n = q + 2kq$, ce qui démontre l'imparité de q . Inversement, si G est d'ordre $2q$ avec q impair, on a $-1 \equiv 2^q$ et p divise 2^q+1 .

Si $p \equiv -1$ (mod. 4), $1/2(p-1)$ est impair et la condition veut dire que 2 n'est pas un carré dans le groupe cyclique F_p^* . D'après une formule complémentaire à la loi de réciprocité quadratique (*Théorie algébrique des nombres,* chap. V, §5, prop. 2, p. 94), cela veut dire que $(p^2-1)/8$ est impair, c'est-à-dire que $(p+1)/4$ est impair, ou que $p+1 \equiv 4$ (mod. 8).

Si $p \equiv 1$ (mod. 4) , et si l'on pose $v_2(p-1) = s$ ($\geqslant 2$) , la condition signifie que 2 est une puissance (2^{s-1})-ième dans F_p^* . Cela implique que 2 est un carré mod. p, c'est-à-dire que $(p^2-1)/8$ est pair (ibid), ou que $(p-1)/4$ est pair, ce qui veut dire $p \equiv 1$ (mod. 8).

Remarque : Un nombre premier $p \equiv 1$ (mod. 8) n'est pas nécessairement un diviseur d'un 2^n+1. Par exemple, pour $p = 17$, l'ordre de G vaut 8 ; pour $p = 41$, il vaut 20, nombres qui ne sont pas de la forme $2 \times$ (impair). Le plus petit $p \equiv 1$ (mod. 8) qui divise un 2^n+1 est 281 : on a $q(281) = 35$ et $2^{35}+1 = 3.11.43.281.86171$.

Table des entiers q(p) *pour* p ≡ 3 (mod. 8)

Le signe R signifie que 2 est racine primitive mod. p, c'est-à-dire que $G = F_p$.

$p = 3$	$q(p) = 1$ R	$p = 139$	$q(p) = 69$ R
$p = 11$	$q(p) = 5$ R	$p = 163$	$q(p) = 81$ R
$p = 19$	$q(p) = 9$ R	$p = 179$	$q(p) = 89$ R
$p = 43$	$q(p) = 7$	$p = 201$	$q(p) = 105$ R
$p = 67$	$q(p) = 33$ R	$p = 227$	$q(p) = 113$ R
$p = 83$	$q(p) = 41$ R	$p = 251$	$q(p) = 25$
$p = 107$	$q(p) = 53$ R	$p = 283$	$q(p) = 47$
$p = 131$	$q(p) = 65$ R	$p = 307$	$q(p) = 51$
		$p = 331$	$q(p) = 15$

J'ai aussi calculé : $q(683) = 11$, $q(2731) = 13$, $q(5419) = 21$. On a :

$$q(86171) = 35 = q(281).$$

On peut se demander si tout nombre impair q est un $q(p)$, avec p comme dans le théorème. C'est vrai si q est premier et distinct de 3 : prendre un diviseur premier p de $2^q + 1$; comme $q = (2k+1)q(p)$ par le théorème, on a $q(p) = q$. C'est vrai aussi pour $q = r^s$ avec r premier $\neq 3$: on pose $q = rq'$ $(q' = r^{s-1})$ et on applique (I) (voir plus bas) à $x = 2^{q'}$ et à $2k + 1 = r$; d'après le lemme(*), aucun facteur premier $p \neq 3$ de $x + 1$ ne divise le second facteur S de (I) car r est premier à p (en effet, comme $q(p)$ divise $q = r^s$, c'est une puissance de r, qui divise $p - 1$, de sorte que r est premier à p) ; on prend alors un diviseur premier $p' \neq 3$ de S ; il divise $2^q + 1$ sans diviser $2^{q'} + 1$; ainsi $q(p')$ divise $q = r^s$ sans diviser $q' = r^{s-1}$; donc $q(p') = r^s = q$.

(*) *Lemme :*

Soit p un diviseur premier de $2^a + 1$. Si $2k + 1$ est premier à p, alors

$$v_p(2^{(2k+1)a} + 1) = v_p(2^a + 1).$$

En effet, on applique l'identité : $x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \ldots - x + 1)$ (I) à $x = 2^a$. Ainsi $x \equiv -1$ (mod. p). Le second facteur de (I) est congru modulo p à

$$(-1)^{2k} - (-1)^{2k-1} + \ldots - (-1) + 1 = 2k + 1$$

et n'est donc pas multiple de p.

Remarque :

On montre aussi que $v_p(2^{pa} + 1) = 1 + v_p(2^a + 1)$: on applique encore (I) à $x = 2^a$, que l'on écrit $x = -1 - rp$ avec $r \in \mathbb{Z}$; le second facteur vaut ici $((1 + rp)^p - 1)/rp$ qui, par la formule du binôme, est congru à p (mod. p^2).

Décompositions des premiers nombres 2^n+1 *(n impair)*

$2^3+1=9=3^2$
$2^5+1=33=3.11$
$2^7+1=129=3.43$
$2^9+1=513=3^3.19$
$2^{11}+1=2049=3.683$
$2^{13}+1=8193=3.2731$
$2^{15}+1=32769=3^2.11.331$
$2^{17}+1=131073=3.43691$
$2^{19}+1=524289=3.174763$
$2^{21}+1=3^2.43.5419$

J'ai aussi calculé :
$2^{27}+1=3^4.19.87211$
$2^{35}+1=3.11.43.86171.281$
$2^{81}+1=3^5.19.87211.163.135433.272010961$
(ce dernier facteur est $\equiv 1$ mod. 8).

ÉNONCÉ N° 136 (Dominique ROUX, Limoges)

Quel est l'isobarycentre des quatre centres des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle ?

SOLUTION (Charles PEROL, Clermont-Ferrand)

Désignons par I, I_A, I_B, I_C les centres des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle (ABC). Voir figure 1 due à Eric SIGWARD de Sarreguemines. Les bissectrices de l'angle A recoupent le cercle circonscrit à (ABC) en deux points A' et A" qui partagent les deux arcs BC chacun en deux arcs égaux, donc qui sont situés sur la médiatrice de [BC].

En raison de l'angle droit, entre les bissectrices de l'angle B, le cercle de diamètre [II_A] passe par B, et de même passe par C. Son centre est donc le point commun à [II_A] et à la médiatrice de [BC] : c'est A'. Nous en déduisons que A' est le milieu du segment [II_A].

De même, le cercle de diamètre [I_BI_C] passe par B et C, son centre A" est le milieu de [I_BI_C]. Enfin, l'isobarycentre G des points I, I_A, I_B, I_C est le milieu du segment [A'A"], qui est un diamètre du cercle circonscrit, *G est donc le centre du cercle circonscrit au triangle.*

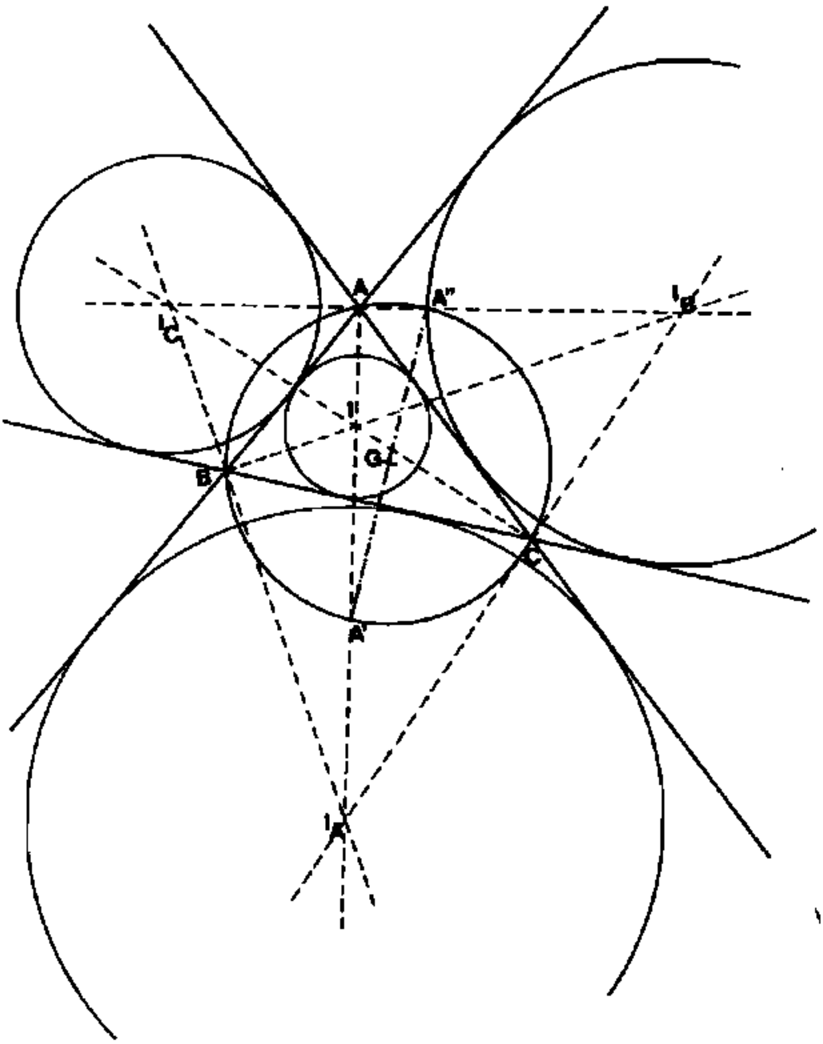

figure 1

Autres solutions :

1) ***Solutions de natures géométriques, le plus souvent reposant sur des propriétés de la droite d'Euler ou du cercle d'Euler :***

André ANGLÈS (Limoges), Hubert BARBERIS (Menton), Luc BARRIA (Serres Morlaas), Maurice BAUVAL (Versailles), Christian BECQUES (Albi), Gérard BORIS (Fontainebleau), Jacques CARON (Ajaccio), Jean-Claude CARREGA (Lyon), Roland CHIAVASSA (Lambesc), Henry COQUILLE (Genève), François COULOIGNER (Forges-les-Eaux), Gérard DELAVALLÉE (La Baule), Edgard DELPLANCHE (Maison-Alfort), Christian DUFIS (Limoges), Lucien FAUCHER (Saint-Junien), Augustin FRATACCI (Porto-Vecchio), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg), Claude GOUANELLE (Bordeaux), Pierre IGOU (Mende), Claude JOBERT (Lyon), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Yves LE CORFF (Paris), René MANZONI (Le Havre), Albert MARCOUT (Sainte-Savine), Annette MOLARD (Strasbourg), Charles NOTARI (Noë), Jean ONIMUS (Auxerre), Georges PIAN (Rennes), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), Eric SIGWARD (Sarreguemines), Joseph VENTURA (Ajaccio), Dominique VOLANT (Saint-Nazaire), et une réponse sans référence (avec, dans le même envoi, des réponses aux énoncés 134 et 135).

2) *Solutions reposant sur un calcul de coordonnées barycentriques :*

Robert CHARDARD (Les Ulis), Jean CHONÉ (Cusset), Suzanne CHRÉTIEN (Villemomble), Pierre COLLANDIN (Paray-le-Monial), Gérard DELAVALLÉE (La Baule), Edgard DELPLANCHE (Maison-Alfort), Lucien FAUCHER (Saint-Junien), Claude JOBERT (Lyon), Thierry LEGAY (Paris), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Jean ONIMUS (Auxerre), Eric SIGWARD (Sarreguemines), Joseph VENTURA (Ajaccio).

Note 1 : L'idée de cet énoncé m'est venu en examinant la figure page 104 du livre *"La géométrie du triangle"* de Yvonne et René SORTAIS (Le Mans), (figure dans laquelle il manque l'indice 1 au point P). Mais ce problème n'est pas original, Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg) donne la référence suivante : question 139 des *"Exercices de géométrie moderne"* de PAPELIER (Vuibert 1947).

Note 2 : Cet énoncé 136 détient un record : celui du nombre de réponses. Il a suscité un courrier total de *93 pages provenant de 40 lecteurs*, qui pour certains se sont plu à donner plusieurs solutions. Lorsque cette rubrique paraîtra, les journées nationales de Rouen seront passées. J'espère qu'à cette occasion un dialogue direct aura permis d'analyser ce phénomène, et d'en dégager quelques conclusions.

Note 3 : La recherche d'une *généralisation à l'espace* de la question 136 semble épineux. Il s'agirait de rechercher l'isobarycentre des centres des sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre. Une première difficulté se présente : le nombre de ces sphères peut aller de cinq à huit.

Il y a toujours la sphère inscrite (à l'intérieur du tétraèdre) et quatre sphères situées dans les pyramides infinies tronquées par une face, mais aussi éventuellement, et cela dépend des aires des faces, des sphères situées dans les combles qui ont pour faîte une arête du tétraèdre. Sur les six combles seuls trois au maximum contiennent une sphère tangente aux quatre faces du tétraèdre. Ceci est expliqué, par exemple, dans le *traité de géométrie* de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7e édition, Gauthier-Villars 1900, questions 962 et 963 pages 273 à 277.

Toutefois, un exemple simple peut nous éclairer. Imaginons (figure 2) un tétraèdre (OABC) dont la base (ABC) est un triangle équilatéral de centre H, et dont le sommet O se trouve sur l'axe (OH) de ce triangle assez loin de la base (OH grand par rapport à AB). Le calcul est alors commode et permet de se rendre compte que, dans cette configuration, l'isobarycentre des sphères tangentes aux faces — que l'on prenne les 3 sphères dans les combles, ou qu'on ne les prenne pas — ne coïncide pas avec le centre de la sphère circonscrite.

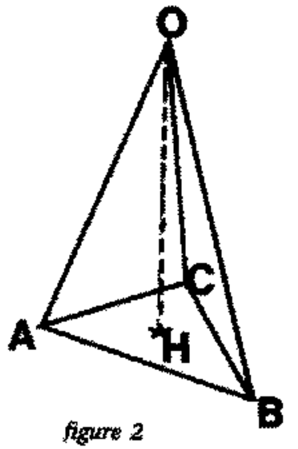

figure 2

Je ne sais donc pas dans quelle direction chercher la généralisation à l'espace de l'énoncé 136.

COURRIER DE LECTEUR

Solutions tardives :
N° 128 et 131 : Jean ONIMUS (Auxerre)
N° 129 : Jacques LEGRAND (Biarritz)
N° 132 et 133 : Jean LEMAIRE (Lille).

Un courrier de Claude MORIN (Limoges) nous conduit à poursuivre l'étude du difficile énoncé n° 100, qui avait été laissé en chantier dans le *Bulletin* n° 354. Le problème était de loger le plus grand polyèdre régulier d'un type donné dans un autre polyèdre régulier. Moyennant de sérieuses réserves (voir préambule page 406 du *Bulletin* n° 354) qui situaient le niveau de rigueur auquel il était raisonnable de se placer, le problème était "résolu" pour 16 cas sur 25.

Voyons quelques nouveaux cas :

• *Inclusion d'un cube dans un tétraèdre régulier*

Deux rangements viennent à l'esprit : ou bien se servir de l'intermédiaire de l'octaèdre régulier. Nous avions trouvé pour le plus grand cube contenu dans l'octaèdre $\frac{V}{V'} = 3(10\sqrt{2} - 14)$, et pour le plus grand octaèdre contenu dans le tétraèdre $\frac{V}{V'} = \frac{1}{2}$. Cette combinaison permet donc de loger le cube dans le tétraèdre régulier, le rapport des volumes étant $\frac{3}{2}(10\sqrt{2} - 14) \approx 0{,}2132$.

L'autre possibilité est de placer une face du cube contre une face du tétraèdre, une arête du cube contre une autre face du tétraèdre et deux sommets du cube dans les deux dernières faces du tétraèdre : voir figure 3.

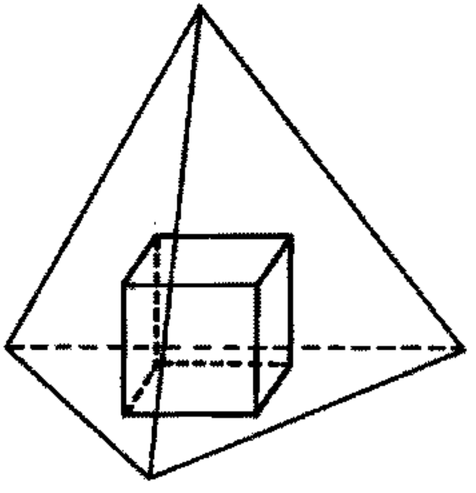

figure 3

Par un calcul élémentaire, Claude MORIN obtient l'expression de l'arête a' du tétraèdre en fonction de l'arête a du cube :

$$a' = a\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

le volume du cube est $V = a^3$, celui du tétraèdre est $V' = \frac{\sqrt{2}}{12}a'^3$.
Donc dans ce cas :

$$\frac{V}{V'} = \frac{72\sqrt{3}}{(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})^3} \approx 0{,}21985$$

ce qui est légèrement meilleur que le résultat obtenu dans la première configuration.

• *Inclusion d'un icosaèdre régulier dans un octaèdre régulier*

Une configuration remarquable se découvre (figure 4) :

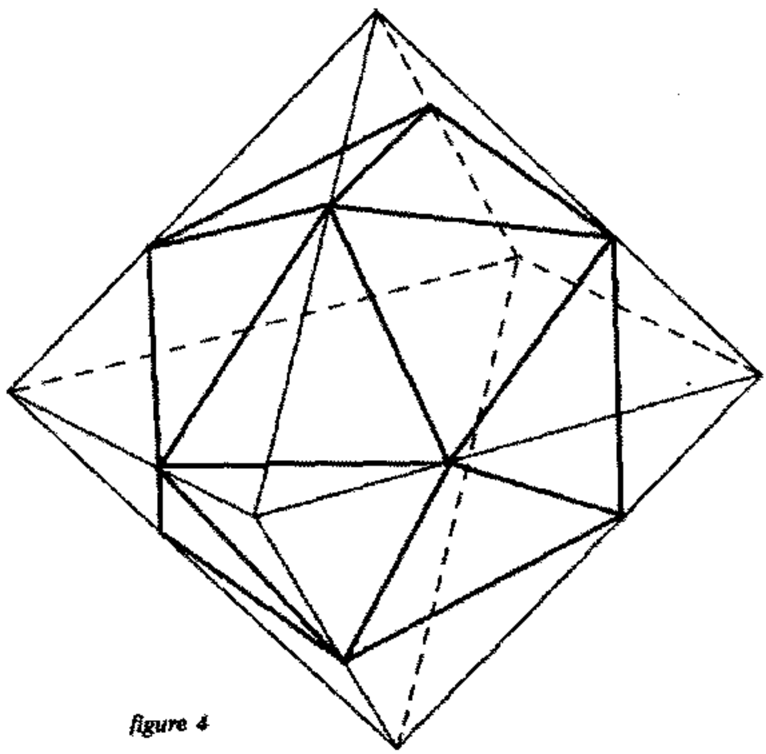

figure 4

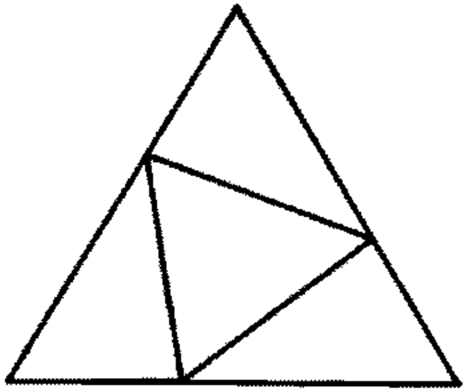

figure 5

Huit des faces de l'icosaèdre sont dans les faces de l'octaèdre, la disposition relative du petit triangle équilatéral (face de l'icosaèdre) par rapport au grand triangle équilatéral (face de l'octaèdre) étant montrée par la figure 5, dans laquelle chaque côté du grand triangle est divisé dans le rapport Φ (nombre d'or) par les sommets du petit. L'arête a de l'icosaèdre est reliée à l'arête a' de l'octaèdre par l'égalité :

$$a = a' \frac{\sqrt{2}}{\Phi^2}$$

Le volume de l'icosaèdre étant $V = a^3 \frac{5}{6} \Phi^2$ et celui de l'octaèdre étant $V' = a'^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ on déduit :

$$\frac{V}{V'} = \frac{5}{\Phi^4} \simeq 0,72949 .$$

Ce rangement est particulièrement bon, il y a peu de place perdue. De toute évidence, il est optimal car chaque sommet de l'icosaèdre appartient à deux faces de l'octaèdre. Nous obtenons du même coup le moyen de loger un icosaèdre régulier dans un tétraèdre régulier en utilisant l'octaèdre dont les sommets sont les milieux des arêtes du tétraèdre, pour lequel $\frac{V}{V'} = \frac{1}{2}$ (voir figure 6 page 409 du *Bulletin* 364).

Dans ce rangement, chaque face du tétraèdre est en contact avec une face de l'icosaèdre, et le rapport des volumes est :

$$\frac{V}{V'} = \frac{5}{2\Phi^4} \simeq 0,36474 .$$

Tableau des résultats obtenus

↓ dans →	tétraèdre	cube	octaèdre	dodécaèdre	icosaèdre
tétraèdre	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \simeq 0,25$	$\frac{5-\sqrt{5}}{15}$ $\simeq 0,18426$	
cube	$\frac{72\sqrt{3}}{(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})^3}$ $\simeq 0,21985$	1	$3(10\sqrt{2}-14)$ $\simeq 0,42641$	$\frac{5-\sqrt{5}}{15}$ $\simeq 0,55278$	
octaèdre	$\frac{1}{2} \simeq 0,5$	$\frac{9}{16} \simeq 0,5625$	1	$\frac{5+3\sqrt{5}}{30}$ $\simeq 0,39027$	$\frac{1+\sqrt{5}}{10}$ $\simeq 0,32361$
dodécaèdre		$\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$ $\simeq 0,42705$		1	
icosaèdre	$\frac{35-15\sqrt{5}}{4}$ $\simeq 0,36474$	$\frac{5\sqrt{5}-5}{12}$ $\simeq 0,51503$	$\frac{35-15\sqrt{5}}{2}$ $\simeq 0,72949$		1

Il reste encore six cases à remplir...