les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉS N° 143 (André VIRICEL, Nancy)

(u_n) désignant la suite de Fibonacci (définie par $u_0=0$, $u_1=1$, puis $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$), calculer u_{2n} connaissant u_n. Exemple : calculer u_{64}, sachant que $u_{32}=2\ 178\ 309$.

ÉNONCÉ N° 144 (Charles NOTARI, Montant Cap Blanc)

Quel est l'ensemble des réels x tels que pour tout entier naturel n , n^x soit entier ?

ÉNONCÉ N° 145 (Dominique ROUX, Limoges)

Pour quels entiers n , l'application qui à toute collection de n réels strictement positifs $(a_1, a_2,...,a_n)$ associe la collection des produits deux à deux : $(a_ia_j\ ;\ 1\leqslant i<j\leqslant n)$, est-elle injective ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 128 (Concours général 1986)

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes. Démontrer l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} |z_i + z_j|$$

SOLUTION de Jean-Claude CARREGA (Lyon)

On a :

$$2|z_1| - |z_2+z_3| = |2z_1| - |z_2+z_3| \leqslant |2z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1+z_2| + |z_1+z_3|$$

d'où $$|z_1| \leqslant \frac{1}{2}[\,|z_1+z_2| + |z_1+z_3| + |z_2+z_3|\,]$$

On obtient de même :

$$|z_2| \leqslant \frac{1}{2}[\,|z_2+z_3| + |z_2+z_4| + |z_3+z_4|\,]$$

$$|z_3| \leqslant \frac{1}{2}[\,|z_3+z_4| + |z_3+z_1| + |z_1+z_4|\,]$$

$$|z_4| \leqslant \frac{1}{2}[\,|z_4+z_1| + |z_4+z_2| + |z_1+z_2|\,]$$

En ajoutant membre à membre les quatre inégalités, on obtient :

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \leqslant |z_1+z_2| + |z_1+z_3| + |z_1+z_4| + |z_2+z_3| + |z_2+z_4| + |z_3+z_4|$$

Autres solutions : Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Denis BIGO (Vendeville), Daniel CARRON (Bruxelles), Robert CHARDARD (Les Ulis), Jacques CHONÉ (Cusset), Suzanne CHRÉTIEN (Villemomble), Hugues DEMONGEOT (Troyes), Gilles DESECOT (Le Cannet), R. FERRÉOL (Paris), Gabriel FRAÏSSE (Ferrals-les-Corbières), B. HÉRON (Orsay), Marc LAVENIR (Montceau-les-Mines), Thierry LEGAY (Paris), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Michèle MALLEUS (Châtenay-Malabry), Charles NOTARI (Noé), L. VIDIANI (Dijon).

Remarque :

La majorité des réponses utilisent le lemme :
Pour tous complexes u et v, $|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$ qui se trouvait en première question dans l'énoncé du Concours général.

Complément 1 : Quand y a-t-il égalité ?

MM. R. CHARDARD, B. HÉRON et M. LAVENIR résolvent cette question et trouvent que l'égalité n'a lieu que si le quadruplet $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ est, à l'ordre près, de la forme $\{z, z, -z, -z\}$.

Complément 2 : Recherche d'une généralisation.

Etant donnés n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i + z_j|$$

• Cas $n=2$: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, donc $S'_2 \leqslant S_2$

• Cas $n=3$: si $z_1 = z_2 = z_3 \neq 0$ $\quad S_3 < S'_3$

si $z_1 = -z_2 = -z_3 \neq 0$ $\quad S'_3 < S_3$

On ne peut rien conclure.

• Cas $n=4$: c'est celui de l'énoncé n° 128, $S_4 \leqslant S'_4$.

• Cas $n > 4$: MM. T. LEGAY, R. FERREOL et F. LO JACOMO établissent soit par récurrence, soit directement l'inégalité :

$$S_n \leqslant \frac{3}{n-1} S'_n .$$

Cela justifie l'existence d'un plus petit réel α_n, tel que $S_n \leqslant \alpha_n S'_n$, pour tout n-uplet de nombres complexes $(n \geqslant 4)$.

Question :

Thierry LEGAY (Paris) demande si l'on peut calculer α_n. On a vu que $\alpha_n \leqslant \dfrac{3}{n-1}$. Il propose la conjecture suivante :

• si n est impair, $\alpha_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2}$

• si n est pair, $\alpha_n = \dfrac{2}{n-2}$,

pour laquelle l'égalité $S_n = \alpha_n S'_n$ est réalisée lorsque $z_i = (-1)^i \; 1 \leqslant i \leqslant n$. Un calcul ordinateur (en Turbo-Pascal) sur 5 000 000 de 5-uplets et de 6-uplets, générés aléatoirement, ne lui a pas permis de mettre cette conjecture en défaut, au contraire, l'ordinateur s'approche peu à peu des cas d'égalités (supposés) ci-dessus.

ÉNONCÉ N° 129 (Gérard BOUILLOT, Dijon)

Un polygone convexe de n côtés, de périmètre $2p$, d'aire S, est inscrit dans un cercle de rayon R. Démontrer :

$$\frac{S^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} \leqslant R^2$$

SOLUTIONS

Ce problème a suscité une remarquable diversité de méthodes.

Première idée :

Robert CHARDARD (Les Ulis), Thierry LEGAY (Paris) et Michel HÉBRAUD (Toulouse) résolvent le problème en utilisant "l'inégalité isopérimétrique" : $p^2 - Sn \tan \frac{\pi}{n} \geqslant 0$ (cf. par exemple Jean FAVARD, *cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique,* Gauthier-Villars, tome 1, page 346), qui montre que le rapport $\frac{S}{p^2}$ d'un polygone convexe de n côtés est maximal lorsque ce polygone est régulier. On sait aussi que le périmètre d'un polygone convexe inscrit dans un cercle est maximal lorsque ce polygone est régulier. Donc, la quantité :

$$\frac{S^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} = \left(\left(\frac{S}{p^2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right) p^2$$

est maximale lorsque le polygone est un polygone convexe régulier, le maximum valant :

$$\frac{\left(pR \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}{p^2} + \frac{\left(nR \sin \frac{\pi}{n}\right)^2}{n^2} = R^2 \qquad \text{(cqfd)}$$

Mais quelques lecteurs observent que cette solution fait appel à des résultats plus délicats à établir que l'énoncé lui-même, et proposent des solutions moins "savantes".

Deuxième idée :

Utiliser des arguments de convexité.

Voici par exemple la solution de François COULOIGNIER (Forges-les-Eaux).

Désignons par θ_i la mesure comprise entre 0 et 2π de l'angle orienté sous lequel on voit du centre 0 le $i$ème côté du polygone. On posera :

$$\alpha_i = \frac{\theta_i}{2}.$$

On a :

$$S = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin \theta_i$$

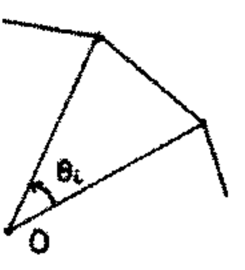

figure 1

(Observer que cette égalité est vraie même si O est extérieur au polygone, cas pour lequel un des sinus est négatif).

D'autre part :

$$p = R \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i$$

Calculons :

$$E = \left(\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \cos \alpha_j\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sin \alpha_i \cos \alpha_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sin \theta_i + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \sin(\alpha_i + \alpha_j)$$

Or, $0 \leqslant \theta_i + \theta_j \leqslant 2\pi$, donc $\sin(\alpha_i+\alpha_j) \geqslant 0$, d'où :

$$\sin \theta_i + \sin \theta_j = 2 \sin \frac{\theta_i+\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i-\theta_j}{2} \leqslant 2 \sin \frac{\theta_i+\theta_j}{2} = 2 \sin(\alpha_i+\alpha_j)$$

par suite :

$$E \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sin \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (\sin \theta_i + \sin \theta_j) = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} \sin \theta_i$$

Donc :

$$\frac{S}{R^2} \leqslant \frac{E}{n} = \frac{p}{nR} \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i ,$$

et :

$$\frac{S^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} \leqslant R^2 \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i\right)^2\right]$$

On utilise alors la convexité de la fonction définie par $f(x) = x^2$,

$$\frac{S^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} \leqslant \frac{R^2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i) = R^2$$

Et l'égalité n'a lieu que si le polygone est régulier.

Troisième idée :

Hugues DEMONGEOT (Troyes) et B. HÉRON (Orsay) utilisent une autre inégalité de convexité.

Avec les notations précédentes l'inégalité

$$\left(\frac{S}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{n}\right)^2 \leqslant R^2$$

prend la forme :

(1) $$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \cos \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i\right)^2 \leqslant 1$$

laquelle peut s'obtenir à partir de l'inégalité plus générale :

$$\text{(II)}\quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{1-x_i^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left[1-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \quad \text{pour } x_i\in[0,1]$$

qui résulte de la concavité de la fonction f définie et continue sur $[0,1]$, $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, qui est deux fois dérivable sur $]0,1[$.

$$f'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad f''(x)=\frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}<0 \quad \text{pour}\quad x\in]0,1[\ .$$

f est concave sur $[0,1]$ de sorte que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.
Cette dernière inégalité permet d'écrire (II), et comme

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\cos\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\,|\cos\alpha_i|$$

il suffit de prendre $x_i=\sin\alpha_i$ dans (II) pour obtenir (I), c'est-à-dire :

$$\frac{S^2}{p^2}+\frac{p^2}{n^2}\leqslant R^2$$

En outre, l'égalité dans cette relation a lieu si et seulement si tous les $\cos\alpha_i$ sont de même signe (positif) et si les $\sin\alpha_i$ sont tous égaux, ce qui correspond au polygone convexe régulier à n côtés.

Quatrième idée :

Gilbert GRIBONVAL (Palaiseau) obtient l'inégalité demandée en se servant d'un développement en série entière, curieuse et inattendue intrusion de l'analyse dans un problème de géométrie plane.

Résultat préliminaire : Pour tout entier naturel k, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels positifs variables dont la somme est donnée égale à $2p$, la quantité

$\sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$ est minimum lorsque les x_i sont égaux.

On a donc : $$\sum_{i=1}^{n} (x_i)^k \geqslant n\left(\frac{2p}{n}\right)^k$$

• *On montre que c'est vrai pour* $n=2$ par exemple grâce à l'étude des variations de la fonction f définie par $f(x)=x^k+(1-x)^k$.

• Puis par l'absurde pour $n>2$: si deux x_i sont distincts, remplaçant chacun d'eux par leur demi-somme, sans changer les autres, on diminue la somme étudiée.

Démonstration de l'inégalité :

Désignons par y_i la distance de O au *i*ème côté, et par x_i sa longueur :

$$S \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i y_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_i}{2}\right)^2} = \frac{R}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{2R}\right)^2}$$

(Il y a égalité si O est intérieur au polygone).

Or, on peut écrire :

$$\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j u^j \quad \text{pour} \quad u \in]-1,1[$$

où les a_j sont des coefficients réels positifs, qu'il n'est pas nécessaire de préciser. Donc :

$$S \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x_i^{2j}}{(2R)^{2j}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R x_i - \frac{R}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x_i^{2j+1}}{(2R)^{2j}}$$

$$= pR - \frac{R}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{1}{(2R)^{2j}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2j+1}$$

ce qui, grâce au résultat préliminaire, est majoré par :

$$pR - \frac{R}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{n}{(2R)^{2j}} \left(\frac{2p}{n}\right)^{2j+1}$$

Finalement :

$$S \leqslant pR \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\frac{p}{nR}\right)^{2j}\right] = pR \sqrt{1 - \left(\frac{p}{nR}\right)^2},$$

d'où le résultat en élevant au carré, et en divisant par p^2.

Cinquième idée :

Non moins originale et surprenante est la solution de Gabriel FRAÏSSE (Ferrals-les-Corbières) qui fait intervenir des notions de statistique !

Reprenant les notations précédentes, désignons par $z_i = \frac{x_i}{2}$ la demi-longueur du *i*ème côté et par y_i la distance de O à ce côté. L'aire du triangle isocèle de sommet O ayant pour base le *i*ème côté est :

$$s_i = y_i \, z_i \, .$$

A la série statistique double $(y_i, z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont attachées des grandeurs :

$m(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$, moyenne des y_i, et de même $m(Z)$,

$v(Y) = m(Y^2) - (m(Y))^2$, variance de Y, et de même $v(Z)$, et $\operatorname{cov}(Y,Z) = m(YZ) - m(Y)\,m(Z)$, covariance de Y et Z.

Montrons par récurrence sur n que $\operatorname{cov}(Y,Z) \leqslant 0$. C'est vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour n, et examinons le cas d'un polygone de $n+1$ côtés, dont le plus petit a pour longueur y_k. Notons $m(Y')$ la moyenne des n nombres y_i autres que le $k$ième, et de même $m(Z')$ la moyenne des n nombres z_i autres que z_k. Il vient :

$$m(YZ) = \frac{n}{n+1}\, m(Y'Z') + \frac{1}{n+1}\, y_k z_k$$

$$\leqslant \frac{n}{n+1}\, m(Y')\, m(Z') + \frac{1}{n+1}\, y_k z_k \leqslant m(Y)\, m(Z)$$

En effet, ceci équivaut à :

$$\frac{n}{n+1}\, m(Y')m(Z') + \frac{1}{n+1} y_k z_k \leqslant \left(\frac{n}{n+1} m(Y') + \frac{1}{n+1} y_k\right)\left(\frac{n}{n+1} m(Z') + \frac{1}{n+1} z_k\right)$$

soit à :

$$\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) m(Y')m(Z') + \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) y_k z_k - \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(m(Y')z_k + y_k m(Z')\right) \leqslant 0$$

ce qui est équivalent à :

$$m(Y')\,(m(Z') - z_k) + y_k(z_k - m(Z')) \leqslant 0$$

c'est-à-dire à : $\qquad (m(Y') - y_k)(m(Z') - z_k) \leqslant 0$

Or y_k est le plus petit des y_i, donc $y_k \leqslant m(Y')$ et comme pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ $y_i^2 + z_i^2 = R^2$, z_k est le plus grand des z_i, donc $z_k \geqslant m(Z')$.

La récurrence est achevée. On a alors, en posant

$$m(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i,$$

$$\frac{S^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2}{p^2} + \frac{p^2}{n^2} = \frac{m(S)^2}{m(Z)^2} + m(Z)^2, \quad \text{car } p = n\,m(Z)$$

$$\leqslant m(Y)^2 + m(Z)^2, \quad \text{car } \operatorname{cov}(Y,Z) = m(S) - m(Y)m(Z) \leqslant 0$$

$$\leqslant m(Y^2) + m(Z^2), \quad \text{car } v(Y) \geqslant 0 \text{ et } v(Z) \geqslant 0$$

$$= m(Y^2 + Z^2) = m(R^2) = R^2.$$

Il y a égalité si et seulement si les y_i sont égaux, donc si le polygone est régulier.

Autres solutions : L'auteur, Jean-Louis GARCIN (Bougival), Alain JASSIONNESSE (Revin), MM. J. LEGRAND (Biarritz) et BAGANAS, MM. J. LEGRAND (Biarritz) et SEMAH, Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noé) et une réponse fausse.

ÉNONCÉ N° 130 (Dominique ROUX, Limoges)

α étant un réel donné, étudier la convergence de la suite $(\sin(n\alpha))^n$.

SOLUTION de l'auteur

Cet énoncé, que l'on pourrait prendre pour un problème d'analyse, est plutôt une question relevant de la théorie des nombres, et plus précisément de la théorie des approximations diophantiennes.

1er cas : $\dfrac{\alpha}{\pi}$ est une fraction $\dfrac{p}{q}$, supposée écrite sous forme irréductible.

a) Si q est impair, on n'a jamais $n\alpha = k\dfrac{\pi}{2}$ avec k impair, donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $\sin(n\alpha)$, qui sont toutes en valeur absolue strictement inférieures à 1, donc la suite converge vers 0.

b) Si q est pair, alors pour n égal à un multiple impair de $\dfrac{q}{2}$ on a $|\sin(n\alpha)| = 1$, et pour n égal à un multiple pair de $\dfrac{q}{2}$ on a $\sin(n\alpha) = 0$. Donc la suite donnée est divergente.

2e cas : $\dfrac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel.

Soient $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \ldots, \dfrac{p_i}{q_i}, \ldots$ la suite des réduites successives déduites du développement en fraction continue du nombre $\dfrac{2\alpha}{\pi}$.

De $p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = \pm 1$ on déduit que p_i ou p_{i+1} est impair, disons par exemple p_i. De plus,

$$\left|\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}, \quad \text{donc} \quad \left|q_i\alpha - p_i\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2q_i},$$

d'où
$$|\sin(q_i\alpha)| = \left|\cos\left(q_i\alpha - p_i\frac{\pi}{2}\right)\right| > \cos\frac{\pi}{2q_i}$$

or,
$$\cos\frac{\pi}{2q_i} = 1 - \frac{\pi^2}{8q_i^2} + o\left(\frac{1}{q_i^2}\right)$$

$$\ln\left(\cos\frac{\pi}{2q_i}\right) = -\frac{\pi^2}{8q_i^2} + o\left(\frac{1}{q_i^2}\right)$$

$$q_i \ln\left(\cos\frac{\pi}{2q_i}\right) = -\frac{\pi^2}{8q_i} + o\left(\frac{1}{q_i}\right)$$

ce qui prouve
$$\lim_{i\to+\infty} q_i \ln\left(\cos\frac{\pi}{2q_i}\right) = 0$$

donc $$\lim_{i \to +\infty} \left(\cos \frac{\pi}{2q_i}\right)^{q_i} = 1$$

Comme $|\sin(q_i\alpha)^{q_i}| < 1$, on en déduit qu'il existe une sous-suite extraite de la suite donnée convergente vers 1 ou -1.

Mais l'ensemble E des valeurs prises par $\sin(n\alpha)$ contient une infinité d'éléments de l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, (E est même dense dans $[-1,1]$), donc il existe aussi une sous-suite extraite de la suite donnée convergente vers 0, ce qui prouve que la suite est divergente.

Conclusion : La suite $(\mathrm{Sin}(n\alpha))^n$ est convergente si et seulement si α est de la forme $\frac{p\pi}{2k+1}$, $(p,k) \in \mathbb{Z}^2$. Sa limite est alors nulle.

Autres solutions : André BELET (Rodez), Robert CHARDARD (Les Ulis), François COULOIGNER (Forges-les-Eaux), Gabriel FRAÏSSE (Lézignan-Corbières), B. HÉRON (Orsay), Thierry LEGAY (Paris), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noé).

COURRIER DE LECTEURS

Voici diverses questions de lecteurs, pour lesquelles je ne dispose d'aucun élément de réponse. Elles sont livrées à titre de questions ouvertes.

1) Richard ANDRÉ-JEANNIN (Tunisie) demande :

Soit r un entier $(r \geqslant 1)$, $Z_n = \sum_{k=0}^{n} k^r$, E et E_n les ensembles :

$$E = (p^r,\ p \in \mathbb{N}),\quad E_n = [Z_n,\ Z_{n+1}[\ \cap\ E \quad (n \geqslant 0)$$

1) La suite Card E_n est-elle bornée ?

2) E_n est-il toujours non vide ?

Commentaire : Dans le cas $r=3$, la deuxième question a fait l'objet de l'énoncé 111 (*Bulletin* d'avril 87).

2) Eugène EHRHARD (Strasbourg) pose la question :

Un polyèdre convexe inscrit et circonscrit à deux sphères concentriques est-il nécessairement régulier ?

Commentaire : La réponse semble être "oui". La proposition analogue dans le plan est immédiate. Il peut être utile de remarquer que les cercles circonscrits aux faces du polyèdre ont tous même rayon.

3) Louis RIVOALLAN (Rochefort) propose :

On désigne par $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite des nombres premiers. m étant un entier fixé, on considère la suite définie par :

$U_0 = n, \quad n \in \mathbf{N}$

$$U_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{U_k}{p_i} & \text{lorsque pour } 0 \leqslant i < m \ (U_k, p_j) = 1 \text{ pour } j < i \text{ et } p_i \mid U_k \\ 1 + p_m U_k & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette suite est-elle, quel que soit U_0, périodique à partir d'un certain rang ?

Cette question, certainement difficile, généralise le problème de COLLATZ concernant la suite u_n définie par : (cas $m = 1$)

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad \text{si } u_n \text{ est impair}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \quad \text{si } u_n \text{ est pair.}$$

cf étude de EHRHART dans le *Bulletin* n° 362, pages 33 à 35.

4) J'ajoute les questions suivantes :

a) 3 et 5 ont une somme divisible par 2^3 ; 15 et 17 ont une somme divisible par 2^5 ; peut-on pour tout entier k, trouver deux nombres premiers consécutifs dont la somme soit divisible par 2^k ?

b) 523, 541, 547 ont une somme divisible par 9 ; 99017, 99023, 99041 ont une somme divisible par 27. Peut-on toujours trouver trois nombres premiers consécutifs dont la somme soit divisible par une puissance de 3 donnée ?

5) Enfin, voici plus une curiosité qu'une question .

Il existe 92 coniques rencontrant 8 droites quelconques de l'espace. Il y a 92 façons de placer 8 reines sur un échiquier, sans qu'il y en ait deux "en prise". Est-ce une coïncidence, ou bien existe-t-il une mystérieuse relation profonde ?

ERRATUM

Bulletin n° 363, dans l'énoncé du théorème page 245, il manque le facteur 2 devant la parenthèse à droite de l'inégalité.