

les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

*M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES*

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 137 (Jean-Louis NICOLAS, Limoges)

J'ai dans ma poche un certain nombre de pièces de 1, 2, 5 et 10 francs. Je peux, avec ces pièces, payer exactement n'importe quelle somme d'argent (en nombres entiers) entre 1 et 99 francs, mais je ne peux faire l'appoint pour 100 francs. Combien ai-je en poche ?

ÉNONCÉ N° 138 (François COULOIGNER, Forges-les-Eaux)

Construire un point D dans le plan d'un triangle ABC donné, tel que A,B,C,D, soient les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier.

ÉNONCÉ N° 139 (Jean ONIMUS, Auxerre)Résoudre dans \mathbb{Q} l'équation :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$$

Note : Une précision manquait dans la proposition pages 524 et 525 du *Bulletin* n° 349 : il fallait supposer $d \neq 0$. La solution de l'énoncé n° 139 réparera cette omission.

SOLUTIONS**ÉNONCÉ N° 122** (P. ERDÖS, Budapest)

Placer dans le plan cinq points, sans qu'il y en ait trois alignés ni quatre cocycliques, de telle façon que leurs distances mutuelles se classent ainsi : une d'une longueur ℓ_1 , deux d'une longueur ℓ_2 , trois d'une longueur ℓ_3 , et quatre d'une longueur ℓ_4 , où $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ sont des réels deux à deux distincts.

SOLUTION (Jean BRETTE, Paris)

Soit ABC un triangle équilatéral de centre D et Γ le cercle de centre C passant par A et B. Soit E l'un des points d'intersection du cercle Γ avec la médiatrice de [AD]. Alors A, B, C, D, E répondent à la question, ce qui donne deux solutions (figures 1 et 2), avec $\ell_1 = EB$, $\ell_2 = EA = ED$, $\ell_3 = DA = DB = DC$, $\ell_4 = AB = AC = BC = CE$. D'autres configurations sont aussi solutions.

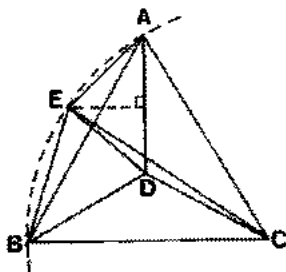


Figure 1

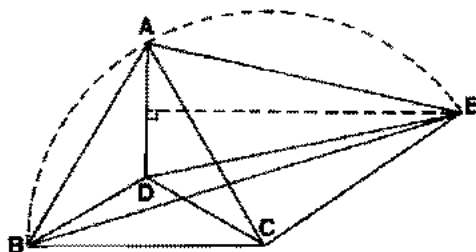


Figure 2

Autres solutions : Roger CUCULIÈRE (Paris), Jean LEMAIRE (Lille), Michèle MALLÉUS (Châtenay-Malabry), Charles NOTARI (Noé), Daniel PECKER (Paris).

Note : La généralisation de ce problème pour n points est une question ouverte. Paul ERDÖS pense qu'il est possible de la résoudre jusqu'à $n=8$.

ÉNONCÉ N° 123 (P. ERDÖS, Budapest)

On joint deux à deux n points distincts donnés dans le plan, non tous alignés. Montrer que l'on obtient au moins n droites distinctes.

SOLUTIONS (Pierre SAMUEL, Orsay)

Première démonstration (cas réel).

Lemme de Sylvester : Si un ensemble E fini, non vide, de points du plan est tel que pour toute paire de points de E , il existe un troisième point dans E aligné avec eux, alors les points de E sont tous alignés ; voir annexe 1 : historique, et annexe 2 : démonstration.

Il revient au même de dire :

Si E est un ensemble fini, non vide, de points du plan non tous alignés, il existe une droite contenant exactement deux points de E .

Ceci nous permet de démontrer la propriété de l'énoncé n° 123 par récurrence :

L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 3$ et est vrai pour $n=3$. Soit P_0, P_1, \dots, P_n $n+1$ points, $n \geq 3$. On peut supposer que $[P_0 P_1]$ est une droite ne contenant aucun des points P_2, P_3, \dots, P_n . Si P_1, P_2, \dots, P_n sont alignés alors $[P_0 P_1], [P_0 P_2], \dots, [P_0 P_n]$ et $[P_1 P_n]$ sont $n+1$ droites distinctes. S'ils ne sont pas tous alignés, d'après l'hypothèse de récurrence, ils forment au moins n droites. Ces droites sont distinctes de $[P_0 P_1]$. En tout, il y a au moins $n+1$ droites distinctes — cqfd —.

Remarque : Paul ERDÖS m'a dit ne pas connaître d'autre démonstration de la propriété, que la précédente démonstration par récurrence. Cela donne du prix à la démonstration qui va suivre, moins simple, mais plus puissante dans la mesure où elle reste valable dans des plans géométriques généraux, alors que le lemme de Sylvester n'est vrai que dans des plans particuliers, voir des contre-exemples en annexe 3.

Deuxième démonstration (cas général)

Soit E un ensemble de n points du plan, non tous alignés et T l'ensemble des droites les joignant deux à deux. Nous noterons d le

nombre d'éléments de T , il s'agit de prouver que $d \geq n$;

Pour tout point P de E , notons $q\{P\}$ le nombre d'éléments de T passant par P . Pour toute droite D de T , notons $k\{D\}$ le nombre des points de E situés sur D . On a l'égalité :

$$\sum_{P \in E} q\{P\} = \sum_{D \in T} k\{D\} \quad (I)$$

qui s'obtient en comptant "par verticales", puis "par horizontales", le nombre des couples $\{P, D\} \in E \times T$ tels que $P \in D$.

On a aussi l'inégalité :

$$q\{P\} \geq k\{D\} \quad \text{si } P \notin D \quad (II)$$

car les droites joignant P aux $k\{D\}$ points de $D \cap E$ sont distinctes.

Indexons les droites $D \in T$ de sorte que les entiers $k\{D\}$ aillent en décroissant : D_1, D_2, \dots, D_d ; en posant $k_i = k\{D_i\}$, on a donc :

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_d \quad \text{et} \quad d \geq 2.$$

Nous allons minorer le premier membre de (I).

Il y a $n - k_1$ points P de E tels que $P \notin D_1$; la somme correspondante des $q\{P\}$ est, par (II), supérieure ou égale à $(n - k_1)k_1$.

Les points P' de $D_1 \cap E$ distincts du point $0 = D_1 \cap D_2$ sont au nombre de $k_1 - 1$ si $0 \in E$ et de k_1 si $0 \notin E$; la somme correspondante des $q\{P'\}$ est supérieure ou égale à $(k_1 - 1)k_2$ dans le premier cas, et à $k_1 k_2$ dans le second. Enfin, si $0 \in E$, il existe $P_1 \in D_1$, $P_1 \neq 0$ et $P_2 \in D_2$, $P_2 \neq 0$. Si D_ℓ est la droite $\{P_1, P_2\}$, D_ℓ ne passe pas par 0 , car sinon D_1 et D_2 seraient confondues. Donc $q\{0\} \geq k_\ell$, avec $3 \leq \ell \leq d$. Dans tous les cas, on a :

$$\sum_{P \in E} q\{P\} \geq (n - k_1)k_1 + (k_1 - 1)k_2 + k_\ell.$$

En utilisant (I), on déduit :

$$k_1 + k_2 + \dots + k_\ell + \dots + k_d \geq (n - k_1)k_1 + (k_1 - 1)k_2 + k_\ell,$$

d'où :

$$(d - 3)k_2 \geq k_3 + \dots + k_{\ell-1} + k_{\ell+1} + \dots + k_d \geq (n - k_1 - 1)k_1 + (k_1 - 2)k_2 \geq (n - 3)k_2 \quad (III)$$

On a donc :

$$(d - 3)k_2 \geq (n - 3)k_2, \quad \text{d'où} \quad d - 3 \geq n - 3 \quad \text{et} \quad d \geq n \quad \text{— cqfd —.}$$

Cette démonstration présente aussi l'intérêt de permettre de caractériser les configurations de points pour lesquelles il y a l'égalité : $d = n$; voir annexe 4.

Autres solutions : Jacques AMON (Angoulême), Robert CHARDARD (Les Ulis), Roger CUCULIÈRE (Paris) qui apporte des précisions historiques utilisées en annexe 1, B. HERON (Orsay), Charles NOTARI (Noé), Daniel PECKER (Paris), et une réponse fausse.

Annexe 1 : Historique du lemme de Sylvester.

Ce lemme a été d'abord proposé par SYLVESTER comme problème dans l'*Educational Times* de 1893. Cette question resta sans réponse durant 40 ans. En 1933, Paul ERDÖS la posa à nouveau et elle fut résolue par T. GALLAI, mais sa démonstration ne fut pas publiée. En 1943, Paul ERDÖS posa simultanément dans l'*American Mathematical Monthly* les deux problèmes : le lemme et l'énoncé n° 123. STEINBERG apporta une solution projective, et KELLY la "démonstration euclidienne" qui va suivre.

Références : COXETER *Introduction to geometry*, John Wiley, 1969 ; et *Le Petit Archimède* n° 77-78, où la démonstration du lemme avait été proposée comme problème n° 126, en octobre 1981.

Annexe 2 : Démonstration du lemme de Sylvester.

Plaçons-nous dans le cadre de la géométrie euclidienne, et procédons par l'absurde, en supposant les points de E non tous alignés. Considérons les triplets $\{A, B, C\}$ de points de E non alignés. Ils sont en nombre fini, non nul. Il existe donc un de ces triplets pour lequel la distance du point A à la droite (BC) est minimum. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $h = AH$ la distance minimum. Par hypothèse (BC) contient un troisième point de E , disons D . Au moins deux des trois points B, C, D , appartiennent à l'un des deux demi-plans fermés limités par la droite (AH) . Alors ces deux points forment avec A un triangle dont une hauteur est strictement inférieure à h . Contradiction.

Annexe 3 : Contre-exemples au lemme de Sylvester.

La propriété de Sylvester est donc vraie dans un plan réel, mais ne l'est plus par exemple dans un plan projectif complexe. Ainsi, les 9 points d'inflexion d'une cubique sans point singulier fournissent un contre-exemple puisque chaque droite joignant deux points d'inflexion recoupe la cubique en un troisième point d'inflexion. Pour la cubique d'équation homogène $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, ces 9 points sont les intersections de la cubique avec les droites d'équations $x=0, y=0, z=0$, soient les points $(0, 1, -1), (0, 1, -j), (0, 1, -j^2)$, etc., dont on vérifie aisément les 12 alignements.

La propriété de Sylvester n'est également pas vérifiée dans des plans affines ou projectifs sur des corps finis. C'est la structure d'ordre du corps de base qui semble essentielle pour assurer la validité du lemme de Sylvester.

Annexe 4 : Examen du cas $d=n$.

On a évidemment $d=n$ lorsque $n-1$ des points de E sont alignés. Est-ce le seul cas ? En remontant la chaîne des majorations faites dans la deuxième démonstration ci-dessus, on voit que $d=n$ implique, d'après (III), que $k_j=k_2$ pour tout $j \geq 2$; d'où, en posant $k_2=k$, $k_j=k$ pour tout $j \neq 1$; posons aussi $k_1=k'$.

Comme les inégalités utilisées doivent être ici des égalités, on a $q\{P'\}=k$ pour tout point P' de $D_1 \cap E$ et $q\{P\}=k'$ pour $P \notin D_1$. Alors (I) s'écrit :

$$(n-k')k' + k'k = k' + (n-1)k$$

$$\text{soit : } (n-1-k')k' = (n-1-k')k.$$

On trouve bien le cas $k'=n-1$ des $n-1$ points alignés, mais aussi le cas $k'=k$ où tous les $k(D)$ et tous les $q\{P\}$ sont égaux à k .

Dans ce cas, l'intersection $D \cap D'$ de deux droites distinctes de T est dans E : en effet, D' passe par un point P , $P \notin D$, donc est l'une des $q\{P\}=k$ droites de T passant par P ; or ces k droites sont celles qui joignent P aux k points de $D \cap E$.

Ainsi E et ses parties $D \cap E$ ($D \in T$) satisfont aux axiomes des *plans projectifs* : juste une "droite" par deux points, juste un point commun à deux "droites" (cf. P. SAMUEL, *Géométrie projective*, chap. 1 ; PUF, 1986).

Annexe 5 :

Daniel PECKER (Paris) demande si l'on peut généraliser la propriété de l'énoncé n° 123 dans des espaces de dimensions finies et énoncer : *Si n points ne sont pas sur un même hyperplan, ils déterminent au moins n hyperplans distincts.*

L'énoncé n° 123 rebondit par cette nouvelle question proposée aux chercheurs.

ÉNONCÉ N° 124 (P. ERDŐS, Budapest)

n points distincts sont donnés dans le plan. A partir de quelle valeur de n est-on sûr de pouvoir former un triangle non isocèle avec trois d'entre eux ?

RÉPONSE : $n=7$.

D'une part, il est facile de construire dans le plan un ensemble de 6 points tel que trois quelconques de ces points soient toujours les sommets d'un triangle isocèle : il suffit de prendre les cinq sommets d'un pentagone régulier et son centre (figure 3).

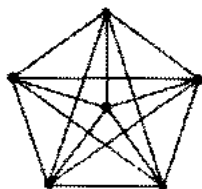


Figure 3

D'autre part, si $n \geq 7$, tout ensemble de n points du plan contient au moins un triangle isocèle. En raison de la longueur de la démonstration de cette assertion, le lecteur intéressé est invité à la lire dans le livre de Ross HONSBERGER : *Joyaux mathématiques*, volume 2, pages 146 à 156 (Cedic, 1979) ; où elle se trouve fort bien publiée.

Autres solutions : B. HÉRON (Orsay), Jean LEMAIRE (Lille), Michèle MALLÉUS (Châtenay-Malabry) et une réponse fausse.

COURRIER DE LECTEURS

Réponses à la question suivante, posée page 355 du *Bulletin* n° 359 :

Chercher des anneaux, commutatifs et unitaires, dans lesquels on puisse trouver deux éléments non associés tels que chacun divise l'autre.

Premier type d'exemple (Jean RUFFIN, Royat ; Pierre SAMUEL, Orsay).

Soit A l'anneau quotient de l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[X]$ par l'idéal principal $5 \times \mathbb{Z}[X]$. Dans A on a :

$$\overline{2X} = \overline{2} \cdot \overline{X} \quad \text{et} \quad \overline{X} = \overline{6X} = \overline{3} \cdot \overline{2X}.$$

Donc les éléments \overline{X} et $\overline{2X}$ de A se divisent mutuellement. Supposons qu'il existe un élément inversible \overline{P} de A tel que :

$$\overline{2X} = \overline{P} \cdot \overline{X} = \overline{PX}.$$

Il existe un élément Q de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant : $PX - 2X = 5XQ$ donc
 $P - 2 = 5Q$.

Si a et b désignent les termes constants des polynômes P et Q respectivement, on a alors : $a - 2 = 5b$.

Or si U désigne l'inverse de P dans A , on a : $\overline{P.U} = \overline{1}$, donc il existe un élément V de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $PU - 1 = 5XV$, d'où, en désignant par c le terme constant de U , $ac = 1$. Par suite, $a = 1$ ou $a = -1$, donc $5b = -1$ ou $5b = -3$, ce qui est impossible.

Ainsi \overline{X} et $\overline{2X}$ ne sont pas associés dans A .

Deuxième type d'exemple (Pierre SAMUEL, Orsay).

Soit A l'anneau quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[U, V, X, Y]$ par l'idéal $(Y - UX, X - VY)$, gradué avec U et V de degré 0 et X et Y de degré 1. Le sous-anneau des éléments homogènes de degré 0 est isomorphe à $\mathbb{Z}[U, V]$, de sorte que les seuls éléments inversibles de A sont ceux de \mathbb{Z} , c'est-à-dire 1 et -1 . Par suite les classes \overline{X} et \overline{Y} ne sont pas associées, bien que l'on ait : $\overline{Y} = \overline{U.X}$ et $\overline{X} = \overline{V.Y}$.

Voisins de ces constructions, Alain BOUVIER (Lyon) propose l'anneau \mathbf{R} quotient de $\mathbf{R}[X, Y, Z]$ par l'idéal $(Y - XZ, X - YZ)$; et Samuel BOURBAU (Chalons-sur-Marne) propose le quotient de l'anneau $\mathbf{R}[X, Y]$ par l'idéal $(XY^2 - X)$ pour les éléments X et XY qui sont diviseurs l'un de l'autre, sans être associés, mais dans ce dernier exemple la vérification est un peu plus longue.

Troisième type d'exemple (Robert CHARDARD, Les Ulis).

Dans l'anneau $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ensemble des fonctions continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , muni de l'addition et de la multiplication, on considère une fonction f continue sur \mathbf{R} pour laquelle il existe deux réels a et b tels que :

- la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$ est la fonction nulle,
- il existe un élément x_1 de $] -\infty, a[$ tel que $f(x_1) \neq 0$,
- il existe un élément x_2 de $] b, +\infty[$ tel que $f(x_2) \neq 0$.

On définit la fonction g continue sur \mathbf{R} par :

$$\begin{cases} g(x) = -f(x) & \text{si } x \leq a \\ g(x) = 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ g(x) = f(x) & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

f et g ne sont pas associées ; en effet, si $f = hg$ avec $h \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ on a :

$$h(x_1) = -1 \quad , \quad h(x_2) = 1 \quad ,$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule pour une valeur de $x_0 \in]x_1, x_2[$, et h n'est pas un élément inversible dans l'anneau $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pourtant f et g se divisent mutuellement puisque l'on a :

$g = uf$ et $f = ug$, où u est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{aligned} u(x) &= -1 && \text{pour } x \leq a \\ u(x) &= 1 && \text{pour } x \geq b \end{aligned}$$

ERRATUM pour le *Bulletin* n° 360 :

Page 467, dans la figure 2, à la place de G , lire G' .