

didactique

voir et savoir

la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace

par Bernard PARZYSZ

Le présent article est une version abrégée — et française — de "Knowing vs Seeing", publié dans Educational Studies in Mathematics, vol. 19, n° 1, février 1988.

L'enseignement de la géométrie de l'espace en France — et peut-être également ailleurs — reste, bien que les nouveaux programmes s'efforcent de le promouvoir, le parent pauvre de l'enseignement des mathématiques. C'est une partie du cours réputée difficile — tant chez les élèves que chez les professeurs — et il est vrai qu'elle pose un certain nombre de problèmes spécifiques, liés pour une part non négligeable à la représentation, aux deux sens de ce terme : représentation mentale, et représentation matérielle (dessins) des figures qui sont objets d'étude. C'est de ce dernier point que nous voudrions parler ici, en illustrant d'exemples extraits d'une recherche en cours au niveau du lycée, dans des classes scientifiques de Première et de Terminale. Notre problématique présente des points communs avec celle de recherches menées en particulier à Grenoble (Bessot 1983, Osta 1987) et à Montpellier (Audibert 1986) ; elle se fonde sur les hypothèses suivantes :

1 Dialectique entre l'acquisition [ou le renforcement] des connaissances en géométrie de l'espace, et la maîtrise des représentations des objets tridimensionnels.

2 Passage obligé par une représentation tridimensionnelle (maquette), même au niveau du lycée. Nous pensons qu'il est certes nécessaire — pour diverses raisons — que les élèves apprennent à se passer de ce type de représentation, mais que ceci ne peut se faire qu'au

bout d'un certain temps, lorsque les images mentales sont véritablement constituées.

3 Nécessité d'explicitier les règles de dessin des figures de l'espace. Ce type de représentation ne relève pas de conventions plus ou moins vagues, mais des propriétés géométriques projectives (il y a donc là l'occasion de faire fonctionner la dialectique mentionnée en 1...).

Nous avons entrepris de rechercher :

1 Les principes plus ou moins implicites qui sous-tendent le "décodage" (lecture) et l'"encodage" (production), par les élèves de lycée, des représentations planes de figures tridimensionnelles.

2 Une ingénierie didactique qui permette de prendre en compte ces principes et de les faire évoluer vers l'élaboration conceptuelle d'un ensemble de règles consciemment maîtrisées par les élèves, donnant à leurs représentations un caractère opératoire qu'elles n'ont pas au départ, et permettant en retour à leurs connaissances géométriques de progresser (Boudarel, Colmez et Parzys, 1987).

Nous nous contenterons ici d'évoquer le premier de ces deux points, et commencerons par fixer le vocabulaire que nous utiliserons dans ce qui suit :

- la **figure** est l'objet géométrique décrit par le texte qui le définit,
- cette **figure** est le plus souvent **représentée**. La **représentation** peut être en *dimension 2* (**dessin**) si la figure ressortit à la géométrie plane, en *dimension 2* ou en *dimension 3* (**modèle**, **maquette**) s'il s'agit de géométrie de l'espace.

Le tableau ci-dessous schématise la correspondance entre la figure et ses diverses représentations. On y distingue *deux niveaux* de représentation :

- *niveau 1* (représentation VOISINE) : la représentation "ressemble" à la figure géométrique : même dimension, au passage au concret près.
- *niveau 2* (représentation ÉLOIGNÉE) : la représentation est de dimension strictement inférieure à celle de la figure.

	géométrie		
	du plan	de l'espace	
	figure		
Repr. voisine	niveau 1	dessin	maquette
Repr. éloignée	niveau 2		dessin

] perte d'information

Il y a nécessairement *perte d'information* lors du passage d'un niveau donné à un niveau supérieur, et cette perte d'information peut avoir différentes causes :

- Niveau 0 → Niveau 1 : tout ne peut être montré sur une représentation ; par exemple, le vectoriel ne peut apparaître, tout au moins de façon directe. De plus, certaines propriétés n'apparaissent que grâce à la "bonne volonté" du lecteur de la représentation (restitution de sens). En effet, cette restitution ne peut souvent avoir lieu que grâce à une *connivence* entre l'auteur de la représentation (l'émetteur) et son lecteur (le récepteur), laquelle n'est possible qu'en raison d'une "culture" géométrique commune. Cette connivence porte en premier lieu sur la *nature* des êtres représentés, qui relèvent d'un nombre restreint de types, constituant en quelque sorte un stock de référence, d'*archétypes* (point, segment, triangle, cercle, plan, pyramide...); toute représentation pouvant alors être rattachée à un "assemblage" de tels archétypes. Ceci est particulièrement évident avec les images que fournissent les ordinateurs : un segment de droite ou un cercle, par exemple, ne sont que très exceptionnellement représentés par un dessin pouvant réellement passer, à l'œil, pour ce qu'il est censé représenter, et ce à cause, non pas tant de l'épaisseur du trait, que des décrochements que celui-ci présente. Et néanmoins, dans la très grande majorité de cas, il est correctement identifié.

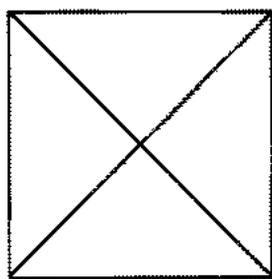
D'autre part, certaines figures ne sont pas représentables, du fait qu'elles ne sont pas bornées (droite, plan...) : aucune réalisation concrète ne pourra donc en rendre compte. On substitue alors traditionnellement à la représentation — impossible — de ces figures celle d'une partie bornée conventionnelle (segment pour la droite, rectangle pour le plan...), chargée de tenir lieu du tout (*synecdoque géométrique*). Ceci peut, bien entendu, être source d'ambiguïté : par exemple, en géométrie du plan, une représentation identifiée — à juste titre — comme étant celle d'un segment représente-t-elle réellement un segment, ou bien plutôt une droite ?

Ainsi, même à ce niveau 1 proche de l'original, la représentation se révèle par nature insuffisante, de l'ordre de la *métaphore* en quelque sorte, et l'interprétation nécessaire qu'en fait le récepteur pour lui donner un sens risque alors d'être abusive. Certes, le poids de la "tradition" est là pour diminuer ce risque, mais d'une part il est parfois insuffisant, et d'autre part — nous y reviendrons plus loin — il peut être la source d'autres types de problèmes.

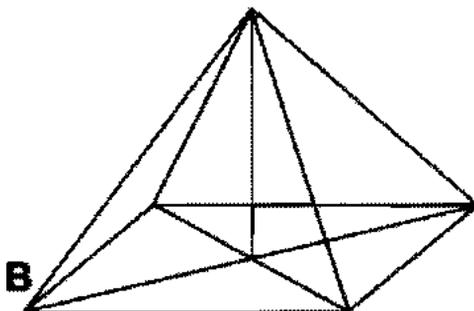
- Niveau 0 → Niveau 2 : il s'agit ici des dessins représentant des figures de l'espace. La relation liant l'objet géométrique à sa représentation est encore plus "floue" que dans le cas de la géométrie plane, et il devient souvent difficile de conjecturer, à partir du dessin, des propriétés de la figure tridimensionnelle elle-même. Par exemple, sur le dessin 1A

(niveau 1), représentant un carré et ses diagonales, on peut assez aisément conjecturer la perpendicularité de celles-ci ; au contraire, sur le *dessin 1B* (niveau 2), représentant une pyramide régulière à base carrée, avec les diagonales de cette base et la hauteur, il est beaucoup moins évident que cette hauteur est perpendiculaire aux diagonales : il faut d'abord se "figurer" (mentalement) une représentation voisine, du type maquette (voire la réaliser), si l'on veut pouvoir y parvenir, à moins que l'on ne soit suffisamment familier des propriétés des objets tridimensionnels en question.

En conclusion : avec des représentations voisines, et bien plus encore avec des représentations éloignées, il n'est généralement pas possible de se passer, sinon du texte original, du moins d'une *légende* accompagnant la représentation, et suppléant la perte d'information inhérente à toute représentation : le dessin, la maquette ne sauraient se substituer à la figure.



A



B

dessin 1

Nous allons maintenant nous intéresser plus spécialement au cas de la géométrie de l'espace, et des représentations éloignées. Deux problèmes se posent alors, comme chaque fois qu'il y a communication : celui de l'*encodage* du message, et celui de son *décodage*.

Le problème du décodage a déjà été évoqué plus haut de façon générale, mais il se complique ici d'une difficulté supplémentaire : le danger que le lecteur confonde la figure tridimensionnelle qui est dessinée avec la figure bidimensionnelle ayant même représentation (ce qui est très proche de la classique confusion signifié/signifiant). Cette difficulté n'est pas imaginaire, et nous l'avons rencontrée même en Première S, en particulier dans un exercice demandant, à partir d'un dessin en perspective cavalière représentant un solide, accompagné d'une légende l'identifiant, d'indiquer la nature de l'une de ses faces. Cette face, un carré, était représentée par un parallélogramme. Et, bien que tous les élèves sussent qu'il s'agissait d'un carré, et que le professeur eût insisté plusieurs fois pour rappeler que c'est au quadrilatère de l'espace — et

non à son dessin — que l'on s'intéressait, plusieurs élèves ont néanmoins donné la réponse "parallélogramme".

Cette identification plus ou moins inconsciente, tendant à considérer le dessin comme une représentation voisine de l'objet dans tous les cas, fournit une explication aux réponses données par les élèves (de trois Premières S et d'une Terminale D) à la question suivante, posée lors d'un test purement perceptif au début de l'année scolaire : "le dessin (cf. dessin 2) représente un plan P et des points A et B de l'espace. Pour chacun de ces deux points dites si, d'après le dessin, il est dans le plan P ou hors de ce plan, ou si le dessin ne permet pas de conclure". Pour les 109 élèves concernés, les résultats ont été les suivants :

	Dans P	Hors de P	On ne peut pas conclure
Point A	81	0	28
Point B	0	78	31

× B

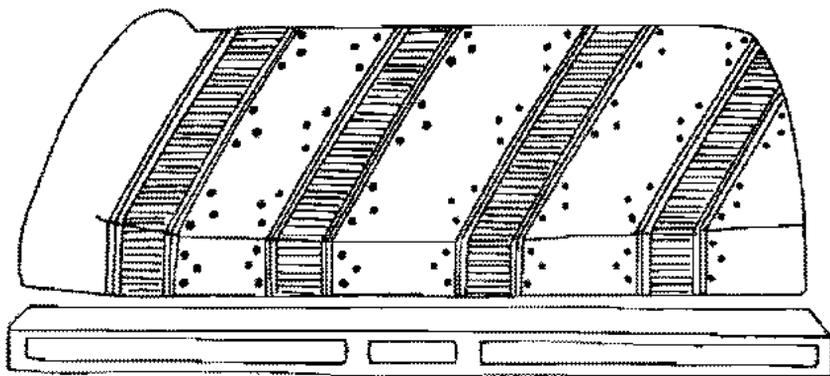


dessin 2

Certes, il est théoriquement impossible d'affirmer que tel point est, ou non, dans le plan P (et un élève sur trois, en moyenne, en est conscient), mais, en ce qui concerne l'aspect proprement perceptif, le résultat est tout à fait net : il y a pour tous identité de l'interprétation, dans le sens suivant : si la *représentation* du point est intérieure [resp. extérieure] à la *représentation* du plan, alors le point lui-même est "u" comme appartenant (resp. extérieur) au plan.

Les problèmes de l'encodage de la figure géométrique tridimensionnelle en un dessin unique ont pour origine l'impossibilité d'en donner une représentation voisine, et l'obligation subséquente de se "rabattre" sur une représentation éloignée, dans laquelle il y aura perte supplémentaire d'information (voir plus haut). L'émetteur se trouve en effet confronté à un dilemme insoluble, du fait que ce que l'on *sait* d'un objet

tridimensionnel s'oppose à ce que l'on en voit. Ce dilemme inévitable a été constant dans l'histoire de l'art, et il est on ne peut mieux résumé par le *dessin 3*, tiré d'une miniature italienne du XIV^e siècle : l'artiste anonyme a représenté le lit sous forme de trapèze (le *perçu*), et a dessiné (à partir de la gauche), sous forme de bandes parallèles, les bandes de la couverture posée sur ce lit (le *su*). D'où l'aspect particulier de la partie droite du dessin, qui concrétise le conflit : la bande inférieure de la couverture n'est pas parallèle au pied du lit.



dessin 3

Ainsi, celui qui dessine un objet tridimensionnel va-t-il devoir trouver un compromis entre les deux pôles opposés et irrémédiablement inconciliables que constituent le "voir" et le "savoir" : les peintres "primitifs" et les "naïfs", par exemple, se trouvant plutôt du côté du "savoir", tandis que les "classiques", utilisant les règles de la perspective linéaire, se situent davantage vers le "voir".

On trouve, dans les productions des élèves, la matérialisation de la gestion de ce conflit entre concept et percept, comme le montre l'exemple suivant, extrait de l'analyse d'un test passé dans trois classes (deux Premières S et une Terminale D) :

On dispose d'une pyramide-squelette régulière à base carrée, d'une vingtaine de centimètres de hauteur, réalisée dans de la baguette de bois (représentation voisine). Le professeur la décrit, et demande aux élèves (après l'avoir soustraite à leur vue) de réaliser un dessin de pyramide en visant le but suivant : "quelqu'un qui n'est pas prévenu doit pouvoir reconnaître que le dessin représente une pyramide régulière à base carrée" (N.B. : le but fixé ne peut être atteint sans utilisation d'indications graphiques supplémentaires (conventionnelles) : égalité de longueurs, angles droits, etc. Seuls 18 élèves sur 88 l'ont fait, dont deux

seulement de façon suffisante pour la détermination de la nature exacte de la figure représentée. Ce qui montre qu'il n'est pas si évident, même à ce niveau, que le dessin *ne peut pas*, à lui seul, se substituer à l'objet).

Nous nous intéresserons plus particulièrement ici aux deux aspects suivants des productions des 88 élèves (63 en Première S et 25 en Terminale D) :

- forme de l'image de la base,
- position de l'image du sommet par rapport à celle de la base.

1. Forme de l'image de la base

Nous avons distingué :

- carré,
- losange (non carré),
- rectangle (non carré),
- parallélogramme (ni losange, ni rectangle),
- trapèze (non parallélogramme),
- autre quadrilatère.

Nous avons pu constater la grande analogie des résultats des différentes classes. D'autre part, les cas ne relevant pas de la perspective parallèle (c'est-à-dire "trapèze" et "divers") ne constituent que 10 % du total, et sont en fait des essais — plus ou moins réussis — de perspective linéaire.

Le *losange* et le *parallélogramme* constituent chacun à peu près 40 % du total en moyenne ; ils rendent par conséquent compte, à eux deux, de la grande majorité de la production. Ces représentations correspondent à une vue "de côté" de l'objet, par opposition au carré et au rectangle, qui eux correspondent à une vue "de face". Cette différence de "direction de vue" explique la désaffection dont sont victimes le rectangle et le carré : une vue de face rend beaucoup moins bien l'effet de profondeur, en perspective parallèle, qu'une vue de côté. Cette désaffection est d'ailleurs sélective : elle frappe surtout le *rectangle* (2 % des cas) qui, par rapport au *carré* (10 % des cas), souffre d'un désavantage majeur : le carré, en effet, donne l'image conforme (voisine) de la base de la pyramide, et ceci peut compenser cela dans une certaine mesure : la représentation du *su* vient ici remplacer la représentation du *perçu*.

De façon analogue, la grande fréquence du losange (qui, a priori, aurait pu surprendre) peut s'expliquer par un souci, chez certains (en nombre non négligeable), de conserver "au mieux", sur le dessin, les propriétés de l'objet lui-même. La base étant carrée, l'idéal serait de la représenter par un carré ; mais l'image ainsi donnée de la pyramide est beaucoup moins satisfaisante, visuellement, par suite du manque de "relief". A l'opposé, la représentation de la base par un parallélogramme ne conserve que le parallélisme des côtés, mais l'effet de perspective est beaucoup plus convaincant. Entre ces deux pôles extrêmes,

nous trouvons... le losange qui, tout en conservant l'essentiel de l'avantage visuel du parallélogramme, préserve de plus l'égalité des longueurs des quatre côtés. D'où son succès (39% des cas).

Ainsi, les élèves qui choisissent le parallélogramme "quelconque" se placent du côté de la représentation du "voir" (ils "donnent à voir"), tandis que ceux qui penchent vers le losange sont davantage du côté de la représentation du "savoir" (ils "font savoir"). Cette dernière attitude correspond en fait à l'illusion que l'on peut, grâce à un dessin suffisamment élaboré et proche de l'objet, et à lui seul, en obtenir une représentation voisine et sans aucune ambiguïté (en l'occurrence, on serait arrivé à un résultat optimum, et de façon plus économique, par le tracé d'un parallélogramme aux côtés obliques plus courts que les côtés horizontaux (*donner à voir*), à condition de lui adjoindre par exemple une indication d'égalité des longueurs des côtés, grâce aux "petits traits" transversaux traditionnels, ainsi que des indications d'orthogonalité [*faire savoir*]. Mais cela, apparemment, n'est pas un acte habituel et spontané chez nos élèves, et nécessite un apprentissage, ou à tout le moins une sensibilisation.

2. Position de l'image du sommet de la pyramide

Au vu des productions des élèves, nous avons distingué :

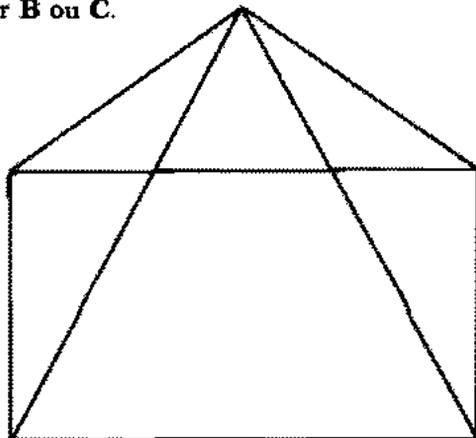
A : image du sommet sur la "verticale" passant par l'intersection des diagonales du quadrilatère représentant la base (cas correspondant à la représentation classique).

B : image du sommet sur la médiatrice du côté "inférieur" du quadrilatère.

C : image du sommet sur la médiatrice du côté "supérieur" du quadrilatère.

X : autres cas.

Remarque : les cas **A**, **B** et **C** ne sont pas exclusifs les uns des autres. En particulier, dans une vue "de face" en perspective parallèle, les trois conditions sont réalisées (*dessin 4*). Dans ce cas, nous avons donné la priorité à **A** sur **B** ou **C**.



dessin 4

Les résultats montrent une nette prédominance du cas A (environ la moitié de l'effectif), qui correspond en général à la représentation classique. Mais il faut également signaler la fréquence non négligeable du cas B (20 à 25 %), *ce qui a priori n'était pas attendu*, et n'est apparu qu'à l'examen des productions.

Ce type de représentation correspond plutôt (mais pas forcément de façon systématique) à une autre priorité dans la construction de la représentation : au lieu de commencer par dessiner la base, on représente d'abord une face latérale, sous la forme d'un triangle isocèle (le "su"), et le reste suit. Ceci est à mettre en parallèle avec le dessin classique du cube en perspective cavalière (dessin avec lequel tous les élèves de ce niveau sont familiarisés) : on commence par dessiner un carré, puis on trace les fuyantes et on complète.

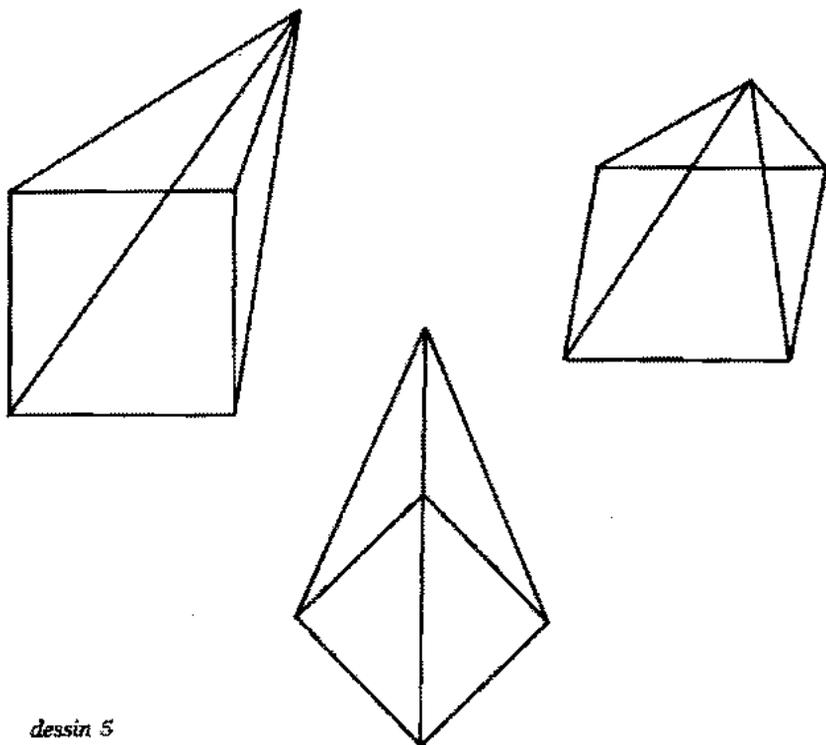
Il est à noter que, même dans le cas de la pyramide, cette représentation est tout à fait correcte du point de vue perspectif : il suffit de placer la pyramide de façon que la face latérale de référence soit frontale.

Le compromis entre la représentation du "voir" et celle du "savoir" peut s'exprimer, ici, de la façon suivante (que l'on traduit habituellement par l'expression "mélange de perspectives" [ou "points de vue inconciliables", cf. Piaget et Inhelder, 1947] ; expression qui, selon nous, ne traduit pas vraiment la démarche de l'élève).

Le "mélange de perspectives" consisterait à imaginer l'élève dessinant d'abord la face avant de l'objet, vu de face (triangle isocèle) mais, s'apercevant que ce dessin manque par trop de relief, il le transformerait ensuite par un changement de "point de vue". Or, il nous paraît plus vraisemblable de penser que, dès le début, l'élève a en tête la représentation dans son ensemble : s'il dessine un triangle isocèle, ce n'est pas parce qu'il veut représenter la pyramide vue de face, mais plutôt parce que cet élément lui semble important pour l'identification de l'objet : *il s'agit d'un savoir à préserver*. Il n'y a donc pas interférence de deux perspectives, mais *intégration d'un savoir dans un voir*, comme dans le cas de la représentation de la base de la pyramide par un losange.

La proportion d'élèves ayant représenté la pyramide de façon "classique" varie, selon la classe, de 27 à 48 %. On peut en conclure que, même si la représentation classique est du domaine de leur compétence (ils sont capables de reconnaître une pyramide régulière sur un dessin complété de conventions graphiques), leurs performances ne sont pas au même niveau, car certaines de leurs productions évoquent difficilement une pyramide régulière (dessin 5), même si elles sont perspectivement correctes. Chez ces élèves, en effet, il n'y a pas choix conscient et délibéré d'une perspective et d'une position de l'objet qui "donnent à voir" [et peuvent ainsi servir de "support" à la pensée et au raisonne-

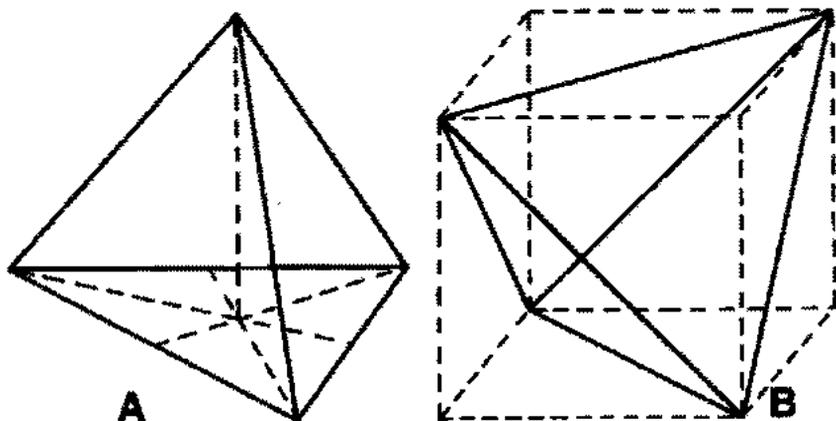
ment), mais utilisation — plus ou moins importante et plus ou moins empirique — d'effets perspectifs, avec un souci de préserver certaines propriétés de l'objet.



dessin 5

Revenons maintenant au cas général : cette nécessité de gérer au mieux le conflit percept/concept a conduit petit à petit les utilisateurs de géométrie à faire des choix qui, en se répétant, ont fini par constituer la "tradition" à laquelle nous faisons allusion plus haut. Comme nous l'avons dit, il y a des dessins "classiques", que l'on peut suivre "verticalement", du XVIII^e siècle à nos jours, aussi bien qu'"horizontalement", d'un manuel à l'autre. Cette tradition a un côté positif : elle permet de reconnaître à première vue l'objet dont il s'agit. Mais elle présente aussi un aspect négatif, en ce sens qu'elle risque d'être sclérosante : les élèves, habitués à dessiner telle figure dans une position fixée (exemple : le cube), perdent de vue le pourquoi de cette représentation précise, et à la limite n'imaginent même plus d'autres représentations. Il en est ainsi du tétraèdre régulier, représenté traditionnellement en

perspective cavalière avec une face horizontale (dessin 6A), et qui a parfois intérêt à être considéré comme inscrit dans un cube (dessin 6B).



dessin 6

Tout ceci, pensons-nous, montre assez la nécessité de travailler, au niveau du lycée au moins, sur les principes mêmes de la représentation plane des figures de l'espace, afin de parvenir à les maîtriser et de ne plus être esclave de dessins stéréotypés, ayant finalement perdu une grande part de leur pouvoir opératoire.

Bibliographie

ADDA J

Representations in mathematics,

in Actes du Colloque Psychologie et Enseignement des mathématiques, Jérusalem ; 1983

AUDIBERT G.

L'enseignement de la géométrie de l'espace

in Bulletin A.P.M.E.P. n° 355 ; 1986

BESSOT D.

Problèmes de représentation de l'espace,

in Bulletin Inter-IREM n° 23 [Enseignement de la géométrie] ; 1983

BOUDAREL J., COLMEZ F. et PARZYSZ B.

Représentation plane des figures de l'espace,

Cahier de Didactique n° 48, IREM Université Paris 7 ; 1987

DELORME A.

Psychologie de la perception,

Edition Études vivantes, Montréal ; 1982

OSTA I.

L'outil informatique et l'enseignement de la géométrie dans l'espace,

in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres ; 1987

PANOFSKY E.

La perspective comme forme symbolique,

Edition de Minuit ; 1975

PIAGET J. et INHELDER B.

La représentation de l'espace chez l'enfant,

4^e édition 1981, PUF ; 1947

VAN SOMMERS P.

Drawing and cognition. Descriptive and experimental studies of graphic production processes,

Cambridge University Press ; 1984