les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 140 (Denis BIGO, Vendeville)

Soit k un entier, on ordonne $\mathbf{N}^k$ par :

$$(x_1,\ldots, x_k) \leqslant (y_1,\ldots,y_k) \iff \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\ ;\ x_i \leqslant y_i$$

Existe-t-il un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^k$ formé d'éléments deux à deux non comparables ?

ÉNONCÉ N° 141 (Maurice MONANGE, Ussel)

Dans tout tétraèdre, la somme des longueurs de deux arêtes opposées est-elle inférieure à celle des trois plus grandes autres arêtes ?

ÉNONCÉ N° 142 (André ANGLÈS, Limoges)

Soit n un entier. Quel est, en fonction de n, le plus petit réel k tel que pour tout polygone convexe de n côtés et pour tout point intérieur M, la somme des distances de M aux côtés soit inférieure ou égale à k fois la somme des distances de M aux sommets du polygone ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 125 (Rallye mathématique de Franche-Comté 1976)

Les pensées de Pascal sont numérotées de 1 à 924 et sont écrites sur les pages 73 à 326 incluses d'un livre. Montrer qu'il en existe au moins 671 telles que chacune soit entièrement écrite sur une seule page de ce livre, dont une ayant le même numéro que la page sur laquelle est est écrite.

SOLUTION (Jean-Claude FONTAINE, Besançon)

Première partie de la question :

Les pensées sont écrites sur 254 pages. Il y a donc 253 changements de pages et par conséquent au plus 253 pensées qui se trouvent écrites sur au moins deux pages. Les autres pensées, qui sont au nombre de 924 moins 253 = 671 sont donc écrites sur une seule page.

Deuxième partie de la question :

Considérons l'ensemble des entiers n, numéro des pensées qui commencent après le début de la page n. Cet ensemble est fini, non vide (il contient 73), donc il admet un plus grand élément $= p$. Il est clair que p n'est pas égal à 924. Donc il existe une pensée numéro $p+1$. Celle-ci ne peut pas commencer après le début de la page $p+1$, sinon p ne serait pas le plus grand. Par suite, puisque la pensée numéro p commence après le début de la page p, la pensée $p+1$ commence sur la page p, et par conséquent la pensée numéro p est entièrement contenue dans la page p.

Remarque :

Ce raisonnement peut être refait en supposant que les pages sur lesquelles sont écrites les pensées sont numérotées de 1 à 254, ou bien de 2 à 255, ou bien de 3 à 256, etc. ou bien de 671 à 924.

Pour chacune de ces paginations, le raisonnement précédent met en évidence une pensée entièrement contenue dans une seule page. Les pensées ainsi obtenues sont deux à deux distinctes, car si deux se trouvent sur une même page elles ne peuvent avoir le même numéro par suite du changement de pagination. On retrouve ainsi le fait qu'il existe au moins 671 pensées, chacune écrite sur une seule page.

Note : Les données numériques ont été puisées dans l'édition illustrée GARNIER (1961). La coïncidence se produit pour la pensée n° 105, qui se trouve page 105.

Autres solutions : André BELET (Rodez), Daniel BUSNEL (Paris), Pierre COLLANDIN (Paray-le-Monial), Hugues DEMONGEOT (Troyes), Gilles DESECOT (Le Cannet), Jean-Louis GARCIN (Bougival), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), Michèle MALLÉUS (Châtenay-Malabry), Pierre MANAC'H (Lorien), René MANZONI (Le Havre), Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noë), Christian RODRIGUEZ (Toulon).

Commentaire

Voici deux extraits du chapitre sur le signifié mathématique appartenant à l'état provisoire de la thèse de Monsieur LO JACOMO sur le langage mathématique :

"L'idée sur laquelle repose la première question, c'est que lorsqu'une pensée ne se trouve pas tout entière sur une même page, elle fait progresser d'une unité le numéro de page (elle fait passer à la page suivante), de sorte que s'il y avait plus de 253 pensées qui ne se trouvent pas entièrement écrites sur une même page, le numéro de page progresserait de plus de 253 unités, ce qui est impossible d'après l'hypothèse. Ceci traduit essentiellement le fait que les nombres entiers se suivent, et il ne me semble pas excessif d'affirmer que quiconque ne trouve pas évidente cette première question (indépendamment de la manière de rédiger la solution) ne connaît pas le concept de *nombre entier*"...

"La seconde question de l'exercice cité ci-dessus, elle, est en grande partie indépendante de la notion d'entier ; elle repose d'abord sur une notion topologique que l'on peut formuler grossièrement ainsi : pour passer de la rive droite à la rive gauche d'une rivière, il est nécessaire de traverser la rivière en un point ; pour passer d'une pensée dont le numéro est inférieur au numéro de la page où elle se trouve à une pensée dont le numéro est supérieur au numéro de la page où elle se trouve, il faut passer par une pensée dont le numéro est égal au numéro de la page sur laquelle elle se trouve : c'est une des nombreuses variantes de ce qu'on appelle le *théorème du point fixe*, qui est purement topologique, et dont l'application à des entiers (les numéros de page et de pensée sont des entiers) entraîne le résultat supplémentaire que parmi ces points fixes, parmi ces pensées qui portent le même numéro que la page sur laquelle elles sont écrites (il peut en exister plusieurs), il s'en trouve au moins une qui soit écrite tout entière sur une même page''.

ÉNONCÉ N° 126 (Robert CHARDARD, Les Ulis)

Existe-t-il une série convergente (x_n) telle que pour tout entier p plus grand que 1 la série (x_n^p) soit divergente ?

SOLUTION de l'auteur.

Ce pobléme a déjà fait l'objet de l'énoncé n° 50 de cette rubrique (*Bulletin* n° 302, page 65). Une solution avait été donnée par Charles AUQUE page 590 du *Bulletin* n° 304, puis une autre :

$$u_n = (\cos(2n\pi/3))/\ln n \text{ ,}$$

de Maurice LAILLET fut signalée page 954 du *Bulletin* n° 306. Exceptés le remarquable travail de Bernard PETIT, qui utilise l'exponentielle complexe, et la solution de l'auteur, toutes les réponses reçues sont identiques ou voisines des solutions déjà publiées, et utilisent aussi la fonction logarithme népérien. Il n'était donc pas inintéressant de revenir sur ce problème, d'une part parce que certains lecteurs l'ont aimé, d'autre part afin de présenter l'ingénieuse solution de Robert CHARDARD, qui ne fait pas appel à des fonctions transcendantes :

On considère la suite u_n définie par ses premiers termes :

$$1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},$$
$$-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{6},\ \ldots$$

De manière précise, si on pose $k_1 = 0$ et pour $p > 1$:

$$k_p = 3[1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + (p-1)^{p-1}]$$

On définit la suite u_n par :

$$\text{si } k_p < n \leqslant k_{p+1} \quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{p} & \text{si } n \equiv 1 \ (3) \\[2mm] u_n = -\dfrac{1}{2p} & \text{si } n \equiv 2 \ (3) \\[2mm] u_n = -\dfrac{1}{2p} & \text{si } n \equiv 0 \ (3) \end{cases}$$

On a donc, si n est compris entre k_p et k_{p+1} :

$$\sum_1^n u_k = \frac{1}{p} \qquad \text{si } n \equiv 1 \ (3)$$

$$\sum_1^n u_k = \frac{1}{2p} \qquad \text{si } n \equiv 2 \ (3)$$

$$\sum_1^n u_k = 0 \qquad \text{si } n \equiv 0 \ (3)$$

Donc, pour tout n supérieur à k_p on a :

$$0 \leqslant \sum_1^n u_k \leqslant \frac{1}{p}.$$

On en déduit que la série $\sum u_n$ converge vers 0.

D'autre part, si n est supérieur à k_{d+1}, on peut écrire, pour $p > 1$:

$$\sum_1^n u_k^p \geqslant \sum_1^{k_{d+1}} u_k^p \geqslant \left(1 - \frac{2}{2^p}\right)\left(1 + \frac{2^2}{2^p} + \ldots + \frac{d^d}{d^p}\right)$$

Or, lorsque d tend vers $+\infty$, $\frac{d^d}{d^p}$ tends vers $+\infty$, donc $\sum_1^n u_k^p$ diverge vers $+\infty$.

Autres solutions : André BELET (Rodez), Jean-Louis GARCIN (Bougival), Gérald GOUBY (Figeac), B. HÉRON (Orsay), Denis HUNEAU (Troyes), François LO JACOMO (Paris), Maurice LAILLET (Givry), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), J. LEGRAND (Biarritz), Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noë), Bernard PETIT (Brest).

ÉNONCÉ N° 127 (Dominique ROUX, Limoges)

Quel est le plus petit réel k tel que pour tout triangle et pour tout point M intérieur, le produit des distances de M aux côtés du triangle soit inférieur ou égal à k fois le produit des distances de M aux sommets ?

SOLUTION et COMPLÉMENTS dus à André ANGLÈS (Limoges)

Nous allons tout de suite étudier la généralisation à un polygone convexe.

Lemme : Soient n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que :

$$n \geqslant 2, \quad 0 < x_i < \pi \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \mathrm{A}.$$

Alors :

$$\prod_{i=1}^n \sin x_i \leqslant \left(\sin \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n ;$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\mathrm{A}}{n}$.

Démonstration : La fonction définie sur $]0,\pi[$ par $f(x) = -\ln \sin x$ a une dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ positive, donc est convexe.

Par suite, $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\,(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))$, d'où :

$\ln \sin x_1 + \ldots + \ln \sin x_n \leqslant n \ln \sin \dfrac{A}{n}$, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Théorème :

Si M est un point intérieur à un polygone convexe de sommets A_1, $A_2, \ldots, A_n$ et si $d_1, d_2, \ldots, d_n$ désignent les distances de M aux côtés successifs (A_1A_2), (A_2A_3), ..., (A_nA_1), alors :

$$d_1\, d_2 \ldots d_n \leqslant \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^n .\ MA_1 . MA_2 \ldots MA_n$$

l'égalité n'ayant lieu que si le polygone est régulier et si M est en son centre.

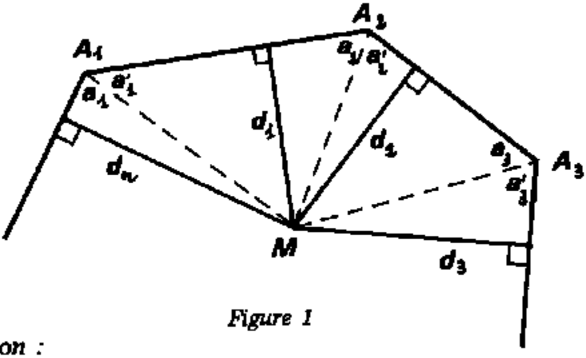

Figure 1

Démonstration :

En chaque sommet A_i, désignons par a_i et a'_i les angles formés entre $[MA_i]$ et les deux côtés du polygone aboutissant en A_i (fig. 1). On peut écrire :

$$\begin{aligned} d_1 &= MA_1 \sin a'_1 = MA_2 \sin a_2 \\ d_2 &= MA_2 \sin a'_2 = MA_3 \sin a_3 \\ &\ldots \\ d_n &= MA_n \sin a'_n = MA_1 \sin a_1 \end{aligned}$$

d'où : $$d_1^2\, d_2^2 \ldots d_n^2 = MA_1^2\, MA_2^2 \ldots MA_n^2 \prod_{i=1}^{n} \sin a_i \sin a'_i$$

Or la somme $(a_1+a'_1)+(a_2+a'_2)+\ldots+(a_n+a'_n)$ est égale à la somme des angles du polygone, ce qui fait $(n-2)\pi$. Le lemme entraîne l'inégalité :

$$\prod_{i=1}^{n} \sin a_i \sin a_i' \leqslant \left(\sin \frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^{2n} = \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{2n}$$

Par suite $d_1\ d_2 \dots\ d_n \leqslant MA_1.MA_2 \dots MA_n.\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^n$ et pour qu'il y ait égalité il faut $a_1 = a_1' = a_2 = a_2' = \dots = a_n = a_n'$, ce qui montre que tous les angles du polygone sont égaux et que M est en son centre. Inversement, dans ce cas, l'égalité se vérifie immédiatement.

Corollaire

Pour tout triangle $(A_1A_2A_3)$ et tout point M intérieur, on a :

$$d_1\ d_2\ d_3 \leqslant \frac{1}{8}\ MA_1.MA_2.MA_3$$

l'égalité n'ayant lieu que si le triangle est équilatéral et si M est en son centre.

En effet, c'est le cas $n = 3$ du théorème. Nous voyons donc que la réponse à l'énoncé n° 127 est :

$$k = \frac{1}{8}.$$

Autres solutions : Robert CHARDARD (Les Ulis), Jean-Louis GARCIN (Bougival), B. HÉRON (Orsay), Christian JEANBRAU (Paris), Michèle KILANI-CHEVALORE (Tunis), Jean LEMAIRE (Lille), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noë).

Complément 1 (obtenu par la majorité des correspondants) :

Si M est intérieur à un triangle donné $(A_1A_2A_3)$ alors :

$$d_1\ d_2\ d_3 \leqslant MA_1.MA_2.MA_3 \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2}$$

l'égalité n'ayant lieu que si M est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

En effet, il suffit de reprendre la démonstration du théorème ci-dessus, et d'utiliser le lemme pour $n = 2$:

$$\sin a_1 \sin a_1' \leqslant \left(\sin \frac{A_1}{2}\right)^2 \ ; \ \sin a_2 \sin a_2' \leqslant \left(\sin \frac{A_2}{2}\right)^2 \ ;$$

$$\sin a_3 \sin a_3' \leqslant \left(\sin \frac{A_3}{2}\right)^2$$

l'égalité n'a lieu que si $a_1 = a_1' = \frac{A_1}{2}$; $a_2 = a_2' = \frac{A_2}{2}$; $a_3 = a_3' = \frac{A_3}{2}$.

Complément 2. André ANGLÈS obtient aussi :

Pour tout triangle (ABC) et tout point M intérieur, on a :

$MA^2.MB.MC \geqslant 4d_B^2\ d_C^2$; où $d_B = d(M,AC)$ et $d_C = d(M,AB)$; l'égalité n'ayant lieu que si le triangle est isocèle-rectangle en A, et si M est le milieu de l'hypoténuse.

En effet, avec les notations de la figure 2 :

$d_B = MA \sin a' = MC \sin c$

$d_C = MB \sin b' = MA \sin a$

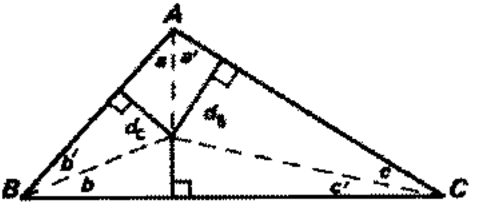

figure 2

Donc :

$d_B^2\ d_C^2 = MA^2.MB.MC \sin a \sin a' \sin b' \sin c$

Or, $a+a'+b'+c = \pi-(b+c') = (MB,MC) \leqslant \pi$.

Donc, en appliquant le lemme,

$$\sin a \sin a' \sin b' \sin c \leqslant [\sin \frac{(MB,MC)}{4}]^4 \leqslant (\sin \frac{\pi}{4})^4$$

D'où $d_B^2\ d_C^2 \leqslant \frac{1}{4} MA^2.MB.MC$, et l'égalité a lieu si et seulement si $a = a' = b' = c = \frac{\pi}{4}$.

En particulier, si M est le milieu I de [BC], on obtient $MB = MC = \frac{BC}{2}$ et d_B et d_C sont alors égaux à la moitié des hauteurs du triangle issues des sommets B et C. On en déduit :

Corollaire 1 :

Dans tout triangle, le produit de la médiane issue d'un sommet par le côté opposé à ce sommet est supérieur ou égal au produit des hauteurs issues des deux autres sommets. L'égalité a lieu si et seulement si le triangle est isocèle rectangle.

Enoncé équivalent, qui est un joli exercice résoluble (grâce à l'aire) en Première S :

Corollaire 2 :

Pour tout parallélogramme, le produit des diagonales est supérieur ou égal au double du produit des deux hauteurs. L'égalité n'a lieu que si le parallélogramme est un carré.

COURRIER DE LECTEURS

André ANGLÈS (Limoges) est allé plus loin dans la recherche d'inégalités géométriques, et nous communique un remarquable résultat, certainement profond, car il contient le fameux théorème d'ERDÖS-MORDELL comme cas particulier :

Théorème :

On donne un triangle (PQR), de côtés p, q, r, appelé *"triangle masque"*. Pour tout triangle (ABC) et tout point M on a :

$$p^2\mathrm{MA} + q^2\mathrm{MB} + r^2\mathrm{MC} \geqslant (qrd_\mathrm{A} + rpd_\mathrm{B} + pqd_\mathrm{C})$$

où d_A, d_B, d_C désignent les *distances algébriques* de M aux côtés du triangle (ABC). De plus, l'égalité n'a lieu que si le triangle (ABC) est semblable au triangle masque et si M est le centre du cercle circonscrit de (ABC).

Commentaire :

Le signe des distances algébriques d_A, d_B, d_C est par convention positif lorsque M est intérieur au triangle ABC. Le signe de d_A est positif dans un demi-plan limité par (BC), négatif dans l'autre. De même, pour d_B et d_C.

Corollaire 1 :

Dans le cas où le triangle masque est équilatéral, on obtient le théorème d'ERDÖS-MORDELL : $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} \geqslant 2(d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B} + d_\mathrm{C})$; l'égalité n'ayant lieu que si (ABC) est équilatéral et M en son centre.

Corollaire 2 :

Prenons un triangle masque isocèle rectangle, cela donne :

$$2\mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} \geqslant 2(d_\mathrm{A} + \sqrt{2}\, d_\mathrm{B} + \sqrt{2}\, d_\mathrm{C})$$

l'égalité n'ayant lieu que si (ABC) est isocèle-rectangle en A et M milieu de l'hypoténuse.

Corollaire 3 :

Si le triangle masque est le triangle (ABC), de côtés a, b, c, on a pour tout triangle :

$$a^2\mathrm{MA} + b^2\mathrm{MB} + c^2\mathrm{MC} \geqslant 2(bcd_\mathrm{A} + cad_\mathrm{B} + abd_\mathrm{C})$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque M est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Scolie :

On obtient aussi une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles (ABC) et (PQR) soient semblables en disant que la fonction

$$f(M) = p^2MA + q^2MB + r^2MC - 2(qrd_A + rpd_B + pqd_C)$$

peut prendre la valeur 0 ("4e cas de similitude").

Démonstration du théorème :

Voyons d'abord le cas où M est intérieur au triangle (ABC).

Désignons par A', B', C' les projections orthogonales de M sur les côtés (BC), (CA), (AB) et par α, β, γ des mesures des angles en A, B, C.

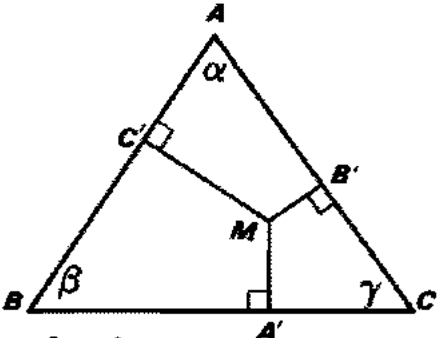

figure 3

Le cercle de diamètre [MA] passe par B' et C', donc :

$$MA = \frac{B'C'}{\sin \alpha}.$$

De même :

$$MB = \frac{C'A'}{\sin \beta} \text{ et } MC = \frac{A'B'}{\sin \gamma}.$$

Dans le triangle (MB'C'), on a :

$$B'C'^2 = MB'^2 + MC'^2 - 2MB'MC' \cos(\pi - \alpha)$$

Or, $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$

d'où : $B'C'^2 = MB'^2 + MC'^2 - 2MB'MC'\cos\beta\cos\gamma + 2MB'MC'\sin\beta\sin\gamma$

$$= (MB'\sin\gamma + MC'\sin\beta)^2 + (MB'\cos\gamma - MC'\cos\beta)^2$$
$$\geqslant (MB'\sin\gamma + MC'\sin\beta)^2$$

donc : $B'C' \geqslant MB'\sin\gamma + MC'\sin\beta$

de même : $C'A' \geqslant MC'\sin\alpha + MA'\sin\gamma$

et : $A'B' \geqslant MA'\sin\beta + MB'\sin\alpha$

Faisons maintenant intervenir le triangle masque, de côtés p, q, r. De ce qui précède, nous déduisons :

$$p^2MA + q^2MB + r^2MC = \frac{p^2}{\sin\alpha} B'C' + \frac{q^2}{\sin\beta} C'A' + \frac{r^2}{\sin\gamma} B'A'$$

$$\geqslant \frac{p^2}{\sin\alpha}(MB'\sin\gamma + MC'\sin\beta) + \frac{q^2}{\sin\beta}(MC'\sin\alpha + MA\sin\gamma) + \frac{r^2}{\sin\gamma}(MA'\sin\beta + MB'\sin\alpha)$$

$$= MA'\left(q^2\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + r^2\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right) + MB'\left(r^2\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + p^2\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) + MC'\left(p^2\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + q^2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$$

$\geqslant MA'(2qr) + MB'(2rp) + MC'(2pq)$.

en raison des inégalités telles que :

$$q^2 \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + r^2 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \geqslant 2qr$$

qui résultent de la suivante : $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ et du fait que tous les sinus sont positifs.

L'inégalité annoncée est prouvée, pour qu'il y ait égalité il faut successivement, en remontant les majorations que :

1) $x = y$, soit $q \sqrt{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}} = r \sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}$, et de même :

$$r \sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}} = p \sqrt{\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}} \quad \text{et} \quad p \sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = q \sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$$

2) $MB' \cos\gamma - MC' \cos\beta = 0$, $MC' \cos\alpha - MA' \cos\gamma = 0$,
$MA' \cos\beta - MB' \cos\alpha = 0$,

ce qui équivaut :

1) $\dfrac{p}{\sin\alpha} = \dfrac{q}{\sin\beta} = \dfrac{r}{\sin\gamma}$, qui grâce à la relation des sinus dans (ABC), signifie que les triangles (ABC) et (PQR) sont semblables.

2) $\dfrac{MA'}{\cos\alpha} = \dfrac{MB'}{\cos\beta} = \dfrac{MC'}{\cos\gamma}$, ces équations sont celles de trois droites passant par A, B, C et par 0, centre du cercle circonscrit, de rayon R, au triangle (ABC), car $0A' = R\cos\alpha$, $0B' = R\cos\beta$, $0C' = R\cos\gamma$, si 0 est intérieur à (ABC). Donc M doit être en 0.

Le cas où M est extérieur au triangle (ABC) semble plus délicat à traiter. Il est, pour le moment, laissé à chercher par les lecteurs. Comme d'habitude, les meilleures démonstrations seront publiées dans cette rubrique.

Pour terminer, voici deux lettres de Jean KUNTZMANN (Grenoble) donnant des critères de divisibilité par 81 et par 121, et quelques réflexions sur l'écriture des nombres.

On connaît les critères de divisibilité par 9 et par 11. On sait moins qu'il est possible de donner de tels critères pour la divisibilité par $9^2 = 81$ et $11^2 = 121$. Nous travaillerons sur des nombres de 4 chiffres, la généralisation est évidente.

Soit le nombre $\overline{mcdu}$. On peut l'écrire :

$$999m + 99c + 9d + m + c + d + u \ .$$

Le critère de divisibilité est : $m + c + d + u = 9k$.

Supposons le vérifié. Le quotient par 9 est : $111m+11c+d+k$.

Pour que le nombre de départ soit divisible par 81, il faut et il suffit que ce nouveau nombre soit multiple de 9, d'où le critère :

$$3m+2c+d+k=9k' .$$

On peut d'ailleurs donner un critère de divisibilité du nombre initial par 27 : $3m+2c+d+k=3k''$ ou encore : $-c+d+k=3k'''$.

Soit maintenant la divisibilité par 11 et 121 . Le nombre $\overline{mcdu}$ peut s'écrire :

$$1001m+99c+11d-m+c-d+u .$$

La divisibilité s'exprime par : $-m+c-d+u=11k$.

Le quotient par 11 est : $91m+9c+d+k$ et la divisibilité du nombre de départ par 121 peut s'exprimer par :

$$3m-2c+d+k=11k' .$$

On remarquera que tout ceci peut s'effectuer mentalement.

Singulier et pluriel dans l'écriture des noms de nombres

La lettre de Nouvel An de l'un de mes petits enfants, puis une enquête de l'AFNOR (Association Française de Normalisation) m'ont amené à m'intéresser à l'écriture des noms de nombres et en particulier à l'emploi du singulier et du pluriel.

La situation qui semble avoir été complètement abandonnée aux hommes de lettres est assez confuse. Jugez plutôt :

quatre-vingts hommes
quatre-vingt-un hommes
deux cents hommes
trois mille hommes (mille est invariable)
l'an mille neuf cent (c'est un ordinal) (on peut aussi écrire mil).

L'anglais et l'allemand ne me semblent pas connaître toutes ces subtilités.

Il me semble que nous autres, mathématiciens et enseignants de mathématique, avons notre mot à dire sur ce sujet. Et voici ce que je dirais personnellement :

Considérons d'abord l'écriture chiffrée. C'est essentiellement un codage au moyen des symboles 0, 1, ..., 9 écrits en file. Ce codage sert à toutes sortes de choses : ordinaux, cardinaux, mais la file secrète de quatre chiffres de ma carte bancaire n'est ni un ordinal, ni un cardinal.

Les noms de nombres en français constituent un codage qui s'inspire du précédent mais qui gagnerait à être débarrassé de ses complications inutiles, en particulier des pluriels.

Si l'on veut insister sur le fait que certaines collections sont constituées par des répétitions de sous-collections, il ne manque pas de substantifs ordinaires : dizaine, douzaine, centaine, millier... qui possèdent un pluriel, et ce que je propose ne fait rien perdre de sa richesse à la langue française.

Il y a d'ailleurs encore d'autres problèmes relatifs à l'écriture des nombres, entre autres celui des traits d'union et celui de la suite mille, million, milliard. J'en parlerai peut-être ultérieurement.

ERRATUM : *Bulletin* n° 362, page 93, ligne 7 :
au lieu de "triangle isocèle", lire "triangle non isocèle".