

histoire des maths

une "fiche historique" : le degré de la terre

par A. Deledicq

Nous développons ici un type de "fiche" qui devrait être un bon outil de travail pour les enseignants de mathématiques que nous essayons d'être :

- un **texte original** est d'abord donné, assorti du repérage des lignes (comme dans les collections de nos classiques littéraires),
- des **commentaires** sont ensuite proposés par référence au numérotage des lignes ; nous les avons rédigés pour des professeurs, mais de manière qu'une version élève puisse en être facilement tirée.

Nous avons choisi l'article *Degré* extrait de la grande encyclopédie de Diderot et D'Alembert, qui présente l'avantage d'être, à la fois, riche en informations et lisible par des élèves de collègue. Et nous avons pris garde, ici, que ne se reproduise pas la petite erreur de montage qui vous a empêché de lire la totalité de l'article Différentiel dans le *Bulletin* n° 359 (juin 87).

* Rappelons que les articles mathématiques de cette Encyclopédie sont réimprimés par : ACL-éditions - BP 40, 75005 PARIS, comme le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. l'a annoncé dans ses deux numéros de juin (page 340), de septembre 1987 (page 378), et dans ce numéro, page 228.

Texte original, extrait de la grande Encyclopédie (1784)

DEGRÉ. Ce mot, en *Géométrie*, signifie la 360^e partie d'une circonférence de cercle. Voyez **CERCLE**.

DEGRÉ de la terre, est l'espace de vingt-cinq 5 lieues qu'il faut parcourir dans le sens du méridien, pour que la ligne du zénith, ou la ligne verticale ait changé d'un degré, ainsi que la hauteur du pôle & les hauteurs des astres. C'est par la mesure d'un degré que l'on a cherché de tout tems à connoître l'étendue de la terre, aussi-tôt qu'on a compris qu'elle étoit ronde.

L'observation de la longueur des ombres, de la hauteur du pôle, & de la hauteur de l'équateur, ou, si l'on veut, de la hauteur méridienne 15 du soleil, en différens pays, fut la première chose qui dut apprendre aux hommes que la terre étoit ronde. Ce fut d'abord par l'ombre des corps terrestres, que l'on détermina les différences de hauteur du pôle; plus on avançoit vers le nord, plus 20 le soleil paroissoit bas à midi, & plus ces ombres mesurées le même jour, par exemple, le jour du solstice, à midi, se trouvoient longues, ce qui prouvoit que la hauteur du soleil, au-dessus de l'horizon, étoit devenue plus petite, & que l'ob- 25 servateur, situé vers le nord, n'étoit pas sur le même plan que l'observateur situé vers le midi, puisqu'alors ils avoient eu l'un & l'autre des ombres égales; on dut en conclure que la terre étoit arrondie.

30 On vit ensuite que l'ombre de la terre, dans les éclipses de lune, paroissoit toujours ronde, & que les vaisseaux vus de loin, en pleine mer, dispa- roissoient par degrés; on les voyoit descendre & se perdre peu-à-peu, par la courbure de la sur- 35 face; & telles furent les marques auxquelles les anciens philosophes reconnurent la courbure & la rondeur de la terre.

Après avoir ainsi reconnu la rondeur de la terre, on se servit du même moyen pour con- 40 noître sa grandeur; & le changement des latitudes & des hauteurs, soit du pôle, soit des astres, servit à connoître l'étendue de notre globe, en en mesurant une petite partie. Ptolémée, au rap- port de Cleomède (*lib. I, cap. 26.*) observa, il 45 y a 1900 ans, que l'étoile appelée *Campus*, qui passoit au méridien d'Alexandrie, à la hauteur d'une quarante-huitième partie du cercle, ou de 7^e, ne s'élevait presque pas à Rhodes, mais qu'elle 50 étoit à l'horizon, & ne faisoit qu'y paroître; il avoit de là que ces deux Villes, (situées d'ail- leurs sous le même méridien à peu-près), étoient éloignées de la quarante-huitième partie du cercle; d'un autre côté, leur distance itinéraire en ligne droite, étoit de 3742 stades; suivant Eratosthène, 55 cité par Pline, (*V. 3.*) & par Strabon, d'où l'on conclut, par une seule règle de trois, que les 360 degrés de la terre faisoient 180 000 stades, aussi, Ptolémée, dans sa *Géographie*, donne à la terre entière 180 000 stades; si l'on évalue le stade 60 Égyptien avec M. le Roy, (*voies des monuments de la Grèce*, page 59), & avec M. Fréret, à 114

toises $\frac{1}{2}$, on aura, pour la circonférence de la terre, 8999 lieues, chacune de 2133 toises, ce qui s'éloigne bien peu de la mesure constatée par l'Académie, qui est d'environ 9000 lieues, comme 65 on le verra bientôt.

Ptolémée, suivant un autre passage de Cleomède, donne à la terre 240 mille stades; Eratosthène, 250; d'autres, suivant Cleomède, 300; 70 en remontant encore plus haut, on trouve dans Aristote 400 000 stades: il est vraisemblable que ces stades n'étoient pas les mêmes, & M. Bailly, dans son histoire de l'*Astronomie moderne*, accorde ces mesures d'une manière vraisemblable, en distinguant les différenes espèces de stades. La mesure 75 d'Eratosthène est la plus célèbre; il trouva qu'il y avoit 5000 stades entre Alexandrie & Syene, & que leur latitude différoit d'un 50^e de cercle. M. Bailly y applique un stade de 85 toises & demi, & il trouve, pour le degré, 59 442 toises. Si l'on 80 y applique le stade des Romains, on trouveroit 66 000 toises, c'est-à-dire un huitième de trop.

Les Arabes firent aussi une mesure de la terre; mais ne sachant pas ce que valloit leur mille, on ne peut savoir si leur mesure s'accorde avec les 85 nôtres.

C'est à un François, nommé *Fernel*, que l'on dut la première connoissance, un peu exacte, de la grandeur de la terre: il rapporte, dans sa *cosmo- 90 théorie*, cette mesure qu'il fit en 1550, en allant 90 à un degré au nord de Paris, & en comptant les tours de roue, il trouva 56 748 toises.

Norwood, en 1635, mesura le degré entre Londres & York & sa mesure, de 367 200 pieds 100 anglais, donne 57 424 toises. Cette mesure étoit 95 à-peu-près aussi exacte que celle de Fernel, & le milieu des deux est fort juste; cependant Riccioli, après s'en être occupé fort long-tems, trouva le degré de 64 363 pas de Bologne, que Picard évalue à 62 900 toises, & Cassini, à 62 650 toises.

La première mesure qu'on ait faite, avec préci- 105 sion, pour connoître la grandeur de la terre, celle qui a été répétée avec le plus de soin, est la mesure du degré entre Paris & Amiens. Je prendrai cette mesure, pour exemple, en expliquant la mé- 110 thode qui a fait trouver, avec tant de précision, la grandeur & la figure de la terre.

L'objet que se proposa Picard, en 1669, fut de connoître le nombre de toises qu'il y avoit en ligne droite, entre Paris & Amiens, & combien de 110 minutes & de secondes il y avoit pour leur diffé- rence de latitude, sur la circonférence du méridien de la terre: ainsi, il y a deux opérations prin- cipales dans ce travail, mesure géodésique en toises, 115 mesure astronomique en degrés.

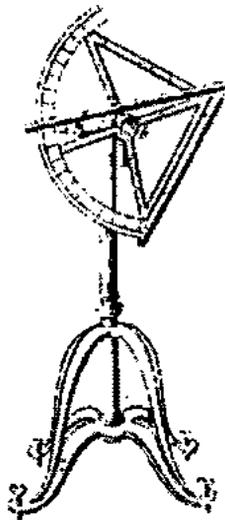
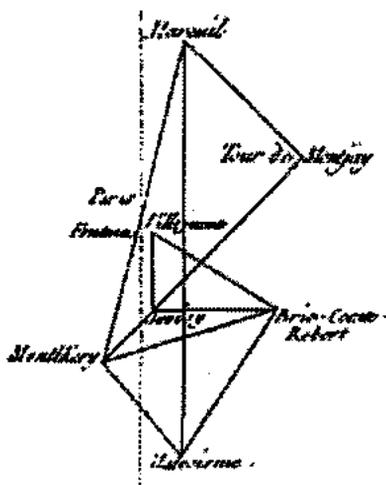
A l'égard de la mesure géodésique, il seroit long & difficile de mesurer toise à toise, d'un bout à l'autre, un espace de vingt-cinq lieues, quoique cela se fût fait en Amérique (*Phil. transf. 1768*). Picard préféra d'employer la trigonométrie, & se 120 contenta de mesurer avec soin, au midi de Paris, un espace de 5663 toises de long, sur le chemin

de Villejuive à Juvisy, qui étoit déjà paré en droite ligne, & d'un côté on tout le rulle par des triangles. Depuis ce temps-là, on a élevé à Villejuive & à Juvisy, deux pyramides qui sont exactement à 5717 toises l'une de l'autre, suivant la mesure que l'Académie a fait faire en 1756.

130 On voit dans la figure 119, la disposition des premiers triangles de Picard; la distance de Villejuive à Juvisy ayant été mesurée, il se transporta aux deux extrémités de cette base, pour mesurer les angles d'un triangle dont le sommet étoit le clocher de Brie-Comte-Robert. Étant placé à Juvisy avec un quart de cercle de trois pieds de rayon, qui portoit deux lunettes, l'une fixe, & l'autre mobile (fig. 181), il dirigea l'une, sur le moulin de Villejuive, où commençoit la mesure, & l'autre, sur le clocher de Brie; l'angle formé par les deux lunettes, se trouva de $95^{\circ} 6' 55''$; il se transporta pareillement à Villejuive, & là, pointant une des lunettes sur le pavillon de Juvisy, qui avoit servi de terme à sa base, & l'autre, sur le clocher de Brie; il trouva l'angle de $54^{\circ} 4' 35''$; de ces deux angles, avec le côté compris, il éton aisé de conclure, par le calcul, la distance de Villejuive à Brie, 11 012 toises 5 pieds; pour vérifier l'observation, il ne négligea pas de mesurer encore immédiatement le troisième angle; il obtint 130 serva aussi la direction de ces triangles par rapport à la méridienne, au moyen des amplitudes du soleil.

Le second triangle se terminoit à la tour du Montlhéry; il fit trouver la distance de Brie à Montlhéry, 13 121; c'est celle que nous trouvons actuellement de 13 168 toises, parce que notre toise est plus longue d'un millième, que celle de Picard. Ces triangles étant prolongés jusqu'à Amiens, l'on a trouvé l'arc du méridien terrestre, compris entre la face méridionale de l'observatoire de Paris, & la flèche de la Cathédrale d'Amiens, 60 390 toises, (mérid. vérifié, pag. 46 & 40.)

En observant avec soin la distance au zénith, des mêmes étoiles à Paris & Amiens, avec un secteur semblable à celui que nous décrivons au mot SPECTEUR, figure 100, l'on trouve $1^{\circ} 1' 13''$ de différence dans toutes les hauteurs, entre deux points, dont la distance étoit 58 233 toises; il ne reste donc plus qu'à faire la proportion suivante, $1^{\circ} 1' 170 173''$, est à 58 233 toises, comme $1^{\circ} 0' 0''$, est à un quart d'une toise, qu'on trouve de 57 074 toises; c'est la longueur du degré de la terre entre Paris & Amiens. En présumant la mesure de la base de Villejuive, faite en 1756, avec la toise qui a servi 175 à la mesure du degré vers l'équateur, on trouve 57 069 toises, pour le degré, entre Paris & Amiens, dont le milieu est par $49^{\circ} 20'$ de latitude; telle est la première mesure exacte qu'on ait eu du degré & de la grandeur de la terre. Depuis ce tems, on en a 180 fait plusieurs autres pour constater son aplatissement, nous en donnerons la table au mot figure de la terre



Commentaires

• Sur le mètre

lignes 4-5

On oublie trop souvent que "le mètre" a été, par définition, la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ; ainsi en avait décidé la Constituante sur proposition de l'Académie des Sciences, en sa séance du 26/03/1791. Delambre et Méchain furent chargés de la mesure, sur l'axe Dunkerque-Paris. Et la loi du 18 germinal an III (07/04/95) fixa une valeur légale du mètre dont un étalon en platine fut réalisé et déposé aux Archives le 22/06/1799.

• La mesure de la terre

lignes 4-11

25 lieues couvrent un degré. Combien couvrent 360 degrés ?

rép. 9000.

En 1780, la lieue de Paris valait 3898 m pour l'administration des Ponts et Chaussées et 4288 m pour celle des Postes. Mais le texte précise, ligne 63, que la lieue dont il est ici question mesure 2283 toises. Sachant que la toise est évaluée à 1.949 m, combien vaut la lieue dont on parle ici ?

rép. 4449.5

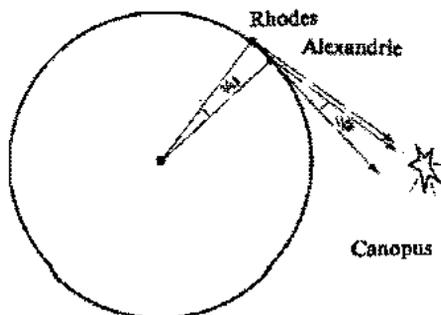
A combien évaluait-on alors la circonférence de la terre ?

rép. 40046 km

La valeur exacte, aujourd'hui connue est, selon le "grand cercle" envisagé, de : 40 075 km le long de l'équateur et 39 940 km le long d'un grand cercle polaire.

lignes 43-59

Voici une figure "éclairante" :



Remarquons que le cercle étant facilement divisible en 48 parties, à la règle et au compas, Posidonius préfère parler de $1/48^e$ de cercle, pour $7,5^e$

lignes 54-57

On peut vérifier l'opération $3752 \times 48 = 180\ 096$, soit environ 180 000 stades. En évaluant le stade à 177.60 m, quelle valeur cela donne-t-il pour la terre ? - rép. 31 968 km.

• Le problème des unités

ligne 79

La phrase "M. Bailly y applique un stade de 85 toises et demi" montre la difficulté dans laquelle se débattait la communication entre savants avant l'adoption du système métrique en 1793 (en France).

On retrouve cette préoccupation dans le texte à de nombreuses reprises : ligne 63, ligne 82, ligne 157, ligne 175. Dans le même ordre d'idées, les lignes 83 à 86 sont tout à fait savoureuses...

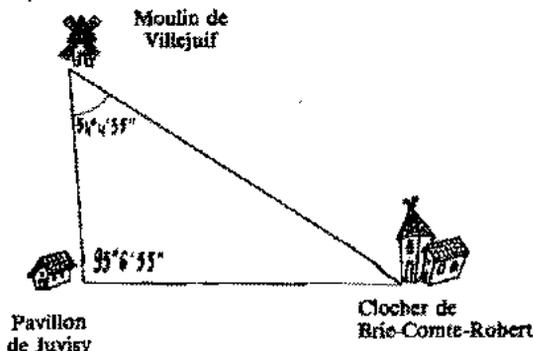
lignes 92-96

Mesure de Fernel : 56 746 toises = 110 598 m
 Mesure de Norwood : 57 424 toises = 111 919 m
 (40 000/360 = 111 111 km)

• La triangulation

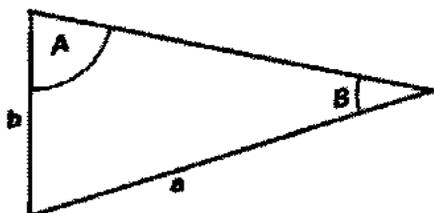
lignes 120-125

La méthode de triangulation mise en œuvre par Picard commence par le côté d'un triangle matérialisé par une route pavée bien droite :



C'est un bon exercice que de chercher la distance de Villejuif à Briec-Comte-Robert par quelques formules de trigonométrie du triangle. Par exemple, celles qui énoncent la proportionnalité des côtés avec le sinus des angles opposés :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$



Et la précision des calculs ?

Evidemment, on hésite à utiliser les minutes et les secondes d'angles ; cela vaut-il la peine dans les calculs ? Une différenciation (à b constant) donne une idée des erreurs commises :

$$da = b \frac{\cos A}{\sin B} dA - \frac{\sin A \cos B}{\sin^2 B} dB$$

B étant de l'ordre de 30° , et A de l'ordre de 60° , on trouve :

$$da \approx b (dA - 3dB)$$

Attention : les angles doivent être mesurés en radians, et il faut donc savoir que :

$$1^\circ = 17,5 \cdot 10^{-3} \text{ radians}$$

$$1' = 0,29 \cdot 10^{-3} \text{ radians}$$

$$1'' = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ radians}$$

Finalement, on trouve une erreur de 6 toises environ pour une erreur de $1'$ sur l'angle A . Il paraît donc raisonnable de se limiter à la précision des minutes pour vérifier le calcul de Picard donnant 11 012 toises.

lignes 163-173

Le résultat final est obtenu par un calcul qu'il est intéressant de faire vérifier :

$$\frac{58\,233}{1 + \frac{1}{60} + \frac{13,1}{3600}} = 57\,074$$

lignes 179-182

Et voilà que l'on s'aperçoit que la terre n'est en fait pas très ronde ! Il s'en faut de 135 km sur les "grands cercles", ce qui représente quelques 375 m pour un degré.