journées nationales 1987 Loctudy

Nous publions dans ce numéro les deux conférences plénières des Journées Nationales de Loctudy.

pourquoi les maths ?

par N. Rouche
G.E.M., 2 chemin du Cyclotron, Louvain-la-Neuve Belgique

Les réponses ordinaires

Enseigner les mathématiques, pour qui ? Pourquoi ? On a vite fait le tour des réponses habituelles à cette double question, mais aussi des objections à ces réponses.

On entend dire que les mathématiques sont utiles dans la vie. Mais, tous comptes faits, très peu de gens recourent à des mathématiques quelque peu substantielles. Et d'ailleurs, de plus en plus, des machines informatiques évitent aux usagers d'avoir à utiliser des notions mathématiques, à commencer par les opérations arithmétiques.

On dit que les mathématiques forment l'esprit, apportent la rigueur, apprennent à raisonner. Or s'il est vrai qu'elles apprennent à raisonner mathématiquement, peut-on dire qu'elles apprennent à raisonner en général ? Et n'est-il pas souvent hors de propos de raisonner mathématiquement en dehors du champ des problèmes mathématiques ?

On dit aussi que les mathématiques méritent d'être étudiées parce qu'elles sont belles. Mais à entendre parler une bonne partie de la population, on s'aperçoit que cette beauté n'est pas goûtée par tout le monde. C'est que sans doute il y a mathématiques et mathématiques, enseignement et enseignement...

Autre argument proche du précédent : les mathématiques sont comme un jeu, on y prend plaisir et donc elles méritent d'être pratiquées pour elles-mêmes. Mais si seule une minorité y réussit ? Et d'ailleurs les jeux ne sont-ils pas trop gratuits pour beaucoup de gens ?

Enfin, les mathématiques, science réputée difficile, sont pour certains l'occasion de se prouver leur force, de s'affirmer intellectuellement. Mais combien d'autres s'y persuadent de leur incapacité, que ce soit à raison ou bien plus souvent à tort ?

Au total donc, autant de réponses, autant de doutes. Ce qui faisait conclure tout récemment à un auteur américain : Pourquoi les maths ? *Parce que* (1)... Courte réponse et réponse courte, aussi décevante et vague que les précédentes. Mais faut-il s'en étonner, et peut-on attendre des réponses convaincantes à une question vague ? Enseigner les mathématiques, qu'est-ce que cela veut dire au juste si on ne précise pas quelles mathématiques et quel enseignement ?

Force est donc de creuser par dessous la question, à un niveau plus profond. Et pour ce faire, commençons par nous interroger sur la construction du sens, en mathématiques d'une part, et dans la pensée commune de l'autre. Nous le ferons sans tenter de dire *a priori* en quel sens (ou en quelle acception si on préfère) nous prenons le mot *sens* (ce mot qu'on ne peut définir qu'après l'avoir défini...). Mais nous ne renonçons pas du tout à nous expliquer là-dessus *a posteriori* (cf. Section 3).

La pensée mathématique dans les traités

Considérons d'abord non pas la pensée mathématique au sens plein, mais plus modestement les théories mathématiques telles qu'on peut les trouver dans les traités contemporains (et même en faisant abstraction des avant-propos ou des commentaires les plus généraux). Elles sont constituées chacune comme un discours formé de mots et de symboles ; ceux-ci assemblés de manière appropriée constituent des termes, eux-mêmes engagés dans des propositions ; ces dernières s'enchaînent pour former des démonstrations, engagées dans des théories. Ces unités de sens emboîtées et de plus en plus grosses sont clairement délimitées. Un morceau d'un mot ou d'un symbole n'a pas de sens, non plus qu'un terme mal tronqué ou une proposition inachevée. De même le début et la fin d'une démonstration se reconnaissent clairement. Quant à la théorie elle-même, s'il est vrai qu'on peut toujours l'étendre, on discerne sans ambiguïté les théorèmes qui lui appartiennent au simple fait qu'ils dérivent des axiomes.

Dans un tel discours, le sens est univoque dès le niveau de base, celui des mots et des symboles (les abus de langage tolérés sont préci-

(1) Les notes ont été regroupées en fin d'article.

sément ceux qui ne menacent pas l'unicité du sens). Et de même pour les niveaux suivants : dès qu'on a pris connaissance d'une proposition ou d'une formule, d'un théorème ou d'un chapitre de la théorie, on sait ce que l'auteur a voulu dire. Il ne faut pas avancer dans la lecture pour le savoir. Mais la signification d'une unité de sens déterminée dépend de la partie antérieure du discours. Il faut donc lire dans l'ordre et l'ordre est imposé par le caractère déductif du discours.

Il ne faut pas se méprendre sur la notion de sens utilisée dans cette analyse. Il s'agit du sens que le lecteur vérifie lorsqu'il déchiffre la théorie, contrôlant pas à pas la non-contradiction des définitions et les chaînons des démonstrations. Cette vérification se décompose en une succession de vérifications locales, puisque la conscience claire ne peut appréhender que peu de choses à la fois. Pour les besoins du présent exposé, convenons d'appeler *sens étroit* (2) le sens ainsi associé au parcours de vérification détaillée que requiert tout discours mathématique. Notons que l'univocité du sens étroit dès le niveau le plus bas est la condition même d'existence de la théorie : à défaut de définition précise des mots et des symboles, le discours théorique ne tiendrait pas la route bien longtemps.

La pensée commune

Ceci dit à propos des théories mathématiques écrites, interrogeons-nous maintenant sur la construction du sens dans la pensée commune. Prenons celle-ci en un sens à la fois vague et familier, telle qu'on l'observe chez une personne qui agit, parle et lit dans la vie quotidienne, et manie les nombres entiers comme à l'école primaire.

La langue qui véhicule cette pensée se décompose aussi en unités de sens emboîtées : les mots, les locutions, les phrases, les récits et dialogues, ou dans la pensée écrite, les paragraphes, les chapitres, les livres. Les plus petites de ces unités sont à peu près clairement délimitées : un morceau de mot, une phrase coupée arbitrairement n'ont pas de sens du tout. Par contre, les unités plus grosses sont moins distinctes : un dialogue peut être repris, le découpage d'un texte en paragraphes ne s'impose pas, etc.

Qui plus est, chaque unité n'est pas pourvue, comme dans le discours mathématique, d'un sens univoque. Et même, comme le dictionnaire en fait foi, la pluralité des sens existe au niveau le plus bas : la plupart des mots ont plusieurs sens. Enfin, beaucoup de mots ont des sens vagues par nature, ce à quoi ils renvoient étant impossible à cerner nettement. Il en va ainsi, entre autres, de mots relevant du domaine moral tels que *aimer, libre, progresser,* etc.

Ceci étant, comment la pensée commune construit-elle des messages assez précis pour suffire aux échanges quotidiens ? La pluralité des sens d'un mot se réduit par le contexte, et tout d'abord par les unités de sens dans lesquelles il se trouve. *Chien* peut vouloir dire beaucoup de choses, *le chien du voisin, le chien de mon fusil* et *ce temps de chien* peuvent en dire déjà beaucoup moins. Il en va de même pour les autres unités de sens en allant vers les plus grosses : chacune est susceptible d'être précisée par celles qui l'englobent, et le complément de sens est souvent dans le discours en aval. L'univocité du sens d'une unité donnée est atteinte parfois très vite, parfois très lentement, parfois jamais. Il arrive qu'une phrase d'un roman (et pas seulement d'un roman policier) ne puisse être complètement saisie qu'après de nombreuses pages de texte. Il arrive qu'un mot dit par une personne à une autre ne prenne tout son sens qu'en référence à la connaissance qu'elles ont l'une de l'autre à la suite d'une vie partagée. Enfin, dans la langue orale, la pluralité des sens se trouve aussi réduite non seulement par certains moyens propres à la parole tels que les intonations ou les variations de débit, mais encore par le contexte non linguistique, entre autres les objets environnant les locuteurs et perçus par eux, les gestes, les sensations, les sentiments, etc. (3).

La fonction — essentielle — des mots de la langue commune est d'évoquer des choses *connues par ailleurs,* non par une définition, mais par l'usage et le contexte (on donne peu de définitions aux bébés qui apprennent à parler). Les définitions des dictionnaires de la langue générale sont des approximations toujours plus ou moins insatisfaisantes. D'ailleurs, au rebours des dictionnaires mathématiques, les grands dictionnaires de la langue entourent chaque mot de beaucoup d'exemples, le plongent dans des contextes variés aidant à cerner l'extension de ses sens. Pour connaître le sens d'un mot en mathématiques, il faut lire sa définition. Pour connaître les sens d'un mot de la langue commune, il faut en pénétrer, beaucoup plus que les définitions, les usages dans des contextes divers. En mathématiques, la définition règle l'usage. Dans la pensée commune, les usages indiquent les acceptions reçues beaucoup plus précisément que les définitions. Paradoxalement, ce sont les mots les plus usités qui ont le plus grand nombre de sens. Mais ce n'est pas pour cela qu'ils sont les moins précis, les plus ambigus. Simplement, ils sont associés aux contextes les plus familiers, les mieux connus : ils sont donc les plus susceptibles de voir leur sens, en chacune de leurs occurrences, précisé nettement par le contexte. Ceux qui se moquent des enchaînements circulaires des définitions du dictionnaire n'ont peut-être pas assez réalisé que les mots puisent leur sens précis à de tout autres sources.

La pensée mathématique dans les problèmes

Revenons à la pensée mathématique, mais cette fois telle qu'elle apparaît dans la résolution des problèmes, et non plus dans le déchiffrement d'une théorie. Résoudre un problème n'est pas une activité principalement déductive. L'esprit s'anime dans le désordre apparent de la pensée créatrice. Il fait des conjectures, cherche des exemples et des contre-exemples, amorce des raisonnements, remonte l'ordre déductif par l'opération d'analyse (si je pouvais prouver ceci, alors... mais de quoi cela dépend-il ?), renforce ou allège les hypothèses, etc., etc.

Le caractère non déductif de l'activité mathématique apparaît le plus clairement lorsque la question attaquée par le chercheur n'est pas soluble dans le cadre d'une théorie connue de lui, mais au contraire l'oblige à inventer ou réinventer des concepts. Car alors la tentative de démonstration précède la définition des concepts nécessaires. Ceux-ci sont forgés pour répondre aux nécessités de la démonstration, et sur le chantier même de celle-ci. Ce qui ne va pas sans réagir sur l'énoncé à démontrer, puisque les concepts nouvellement définis y servent habituellement. En bref, tout bouge à la fois : l'énoncé, la preuve et les concepts sont ajustés les uns aux autres par essais successifs, l'esprit allant de reprise en reprise jusqu'à la solution.

I. Lakatos (4) a bien montré cela pour le mouvement lent de la création mathématique au cours des siècles. Il appelle *proof-generated concepts* les concepts ainsi créés pour permettre de construire une preuve. On observe une telle marche non déductive de la pensée chez les élèves auxquels on propose des problèmes qui les obligent à conceptualiser. (Par rapport aux mathématiciens qui travaillent souvent dans le cadre d'une théorie constituée, les élèves, qui ont tout à apprendre, conceptualisent à un rythme soutenu).

Ainsi, la pensée mathématique active n'a pas, comme les théories écrites dans les traités, en tout point un sens univoque entièrement construit en amont de ce point. Comme dans la pensée commune, le sens s'y construit en aval autant qu'en amont, chaque unité de sens devant être ajustée (très souvent *a posteriori*) aux unités de sens plus larges dans lesquelles elle est successivement immergée, les définitions aux énoncés et aux preuves, les énoncés aux preuves.

Mais alors une nouvelle question se pose : le type de construction du sens que nous venons d'analyser au niveau d'un énoncé et de sa démonstration s'étend-il à la construction des théories elles-mêmes ? Est-ce que les lemmes, les théorèmes et les corollaires (et par entraînement les preuves et les concepts) doivent être ajustés et réordonnés au cours de l'élaboration théorique et pour la servir ? Et dans la lente progression de l'histoire, les théories elles-mêmes n'ont-elles pas été changées et brassées pour servir un dessein culturel qui les déborde chacune ? Il ne fait guère de doute que la réponse est oui.

Mais ceci nous fait déboucher sur une nouvelle acception du mot *sens* en mathématiques. Pour bien voir cela, reprenons la question à la base et par un autre biais.

Cette pensée mathématique active, dont nous venons de voir qu'elle ne suit pas l'ordre déductif, a pourtant pour vocation d'y tendre. Elle cherche à construire un ordre où les concepts (les définitions) précèdent l'énoncé et la preuve. La théorie constituée est le terme de la recherche. Mais le seul mobile de la pensée mathématique en recherche est-il d'arriver à enchaîner techniquement des propositions par les règles de la logique ? Est-il de produire non déductivement du déductif ? Du sens étroit ? Evidemment non.

Revenons pour un moment aux théories écrites des traités, qui exhibent si bien le sens étroit qu'elles semblent parfois, aux profanes, n'exhiber que lui. Poincaré, puis Hadamard, l'ont expliqué dans des textes (5) qui ont gardé toute leur valeur : on ne peut pas dire que l'on ait compris une démonstration si on a seulement contrôlé qu'elle relie les hypothèses à la thèse sans faute logique. Il faut aller plus loin jusqu'à l'embrasser dans une vue intuitive unique, saisir son architecture, son fil conducteur, ce qui l'a inspirée. Pour saisir ainsi plus largement le sens d'une définition ou d'un théorème, il faut lire le texte en aval autant qu'en amont : les raisons d'être se trouvent plus loin, on ne peut pas savoir où on va avant d'y avoir été ne fut-ce qu'une fois. Cette solidarité à grande portée des parties du discours mathématique devient évidente dès qu'on se souvient des péripéties de sa construction, de l'ajustement de ces parties les unes aux autres pour servir un dessein d'ensemble. Mais dans les mathématiques des traités, ces péripéties ont disparu. Le lecteur est astreint à un travail, souvent difficile et lent, de reconstruction d'un sens global.

Faisons maintenant un pas supplémentaire. Si les théories mathématiques ont, comme nous venons de le voir, un sens large, est-ce qu'elles le puisent uniquement dans leur structure propre ? Non, car non seulement elles se situent les unes par rapport aux autres, servent les unes dans les autres, mais encore elles entretiennent des relations souvent intimes avec d'autres disciplines, et particulièrement la physique. En outre, la pensée mathématique s'appuie constamment sur des intuitions diverses, géométriques, cinématiques ou autres, puisées dans l'univers familier, ainsi que sur certaines formes de la sensibilité esthétique. Ces intuitions, dont Hadamard (6) a montré les variations de nature d'un esprit à l'autre, font à ce point partie intégrante de la pensée mathématique que, sans elles, celle-ci s'éteindrait.

Le fait est si souvent méconnu dans l'enseignement qu'il est bon d'y insister : il existe en mathématique un sens riche et profond qui déborde le sens étroit. Et ceci dès le premier niveau : un mot ou un symbole évoque beaucoup plus que son sens minimal, celui qui suffit à assurer son rôle strict dans la construction logique. Il suffit, pour s'en convaincre, de penser à toutes les images qu'évoquent dans chaque esprit des mots comme *parallèles* ou *limite*, ou des symboles comme π

et ϵ. Mais à tous les niveaux, le même phénomène se reproduit : chaque unité du discours reçoit, par delà son sens étroit, un supplément de sens, du fait de son immersion dans des unités plus vastes et de toutes les adhérences qu'elle a établies dans chaque esprit avec les mots, les formes et les choses de la pensée commune. Nous appellerons ce sens le *sens contextuel*, pour rappeler que chaque unité du discours le puise principalement dans ce qui la déborde et l'entoure, en aval autant qu'en amont, dans le discours théorique et la pensée commune.

Ces deux acceptions du mot *sens*, à savoir sens étroit et sens contextuel, sont opposées l'une à l'autre : la première assigne à chaque unité du discours un unique référent, elle évoque la précision, la rigueur ; la seconde multiplie les référents, elle correspond à la richesse, à l'imagination, à la capacité de suggestion. D'un côté on dit : le sens est clair, et de l'autre : c'est plein de sens, ou le sens est profond.

Ces deux faces de la pensée mathématique sont complémentaires. Non seulement dans toute lecture, mais *a fortiori* dans tout travail mathématique, les changements de plan se succèdent et s'appellent l'un l'autre : le téléobjectif (la loupe...) alterne avec le grand angulaire, la vue nette de peu de choses avec la vue large mais estompée d'une foule de choses théoriques ou familières. Il y a comme un jeu en contrepoint du sens étroit et du sens contextuel. La pensée locale et univoque est en quelque sorte pilotée par la pensée large, qui véhicule le sens le plus riche.

Insistons sur ce point : *l'existence d'un contexte ample et significatif (et donc familier au chercheur) est une condition nécessaire de toute activité mathématique*. Bourbaki (7) parle du "paysage où se meut" le chercheur. On peut, sans la trahir, amplifier quelque peu cette métaphore. Certes, pour ne pas trébucher, le chercheur doit regarder où il pose les pieds (et c'est le sens étroit), mais il relève aussi fréquemment la tête pour s'orienter, considérer au loin son objectif et repérer les passages possibles à moyenne distance (et c'est le sens contextuel).

Une pensée mathématique sans contexte suffisant

L'histoire de l'enseignement dans les vingt-cinq dernières années montre *a contrario* l'importance du contexte dans la pensée mathématique. Pour rapprocher le contenu des mathématiques scolaires des mathématiques vivantes, les promoteurs des "maths modernes" ont fait commencer l'enseignement par des structures pauvres, celles que l'humanité a lentement dégagées à travers des siècles de problèmes et de controverses. *Or ces structures étaient, pour les commençants, dépourvues de contexte significatif.*

Cette affirmation importante mérite d'être explicitée, ce que nous ferons grâce à la distinction suivante (due à P.J. Hilton (8)) entre illustration et application : une *illustration* d'une théorie est une situation simple qui aide à la comprendre, tandis qu'une *application* est une situation complexe que la théorie aide à comprendre.

Or précisément, les structures pauvres enseignées au départ des maths modernes pouvaient être illustrées, mais à défaut de contexte suffisant (dans l'esprit des élèves), elles ne pouvaient quasiment pas être appliquées. D'où cette kyrielle d'exemples sans portée entourant, dans les manuels des années soixante-dix, non seulement les notions sur les ensembles et relations, mais aussi d'autres structures : anneau, groupe, espace vectoriel, etc. Enseignement centré sur l'acquisition des concepts et des structures, étayé d'illustrations *ad hoc* et ne conduisant, par la force des choses, qu'à très peu d'exercices autres que la reconnaissance d'une structure dans une situation qui l'illustre. Où va un tel enseignement dans le paysage connu des élèves ? Est-il étonnant qu'ils aient demandé tant de fois "à quoi ça sert ?" Ils étaient en réalité semblables à des myopes profonds auxquels on demandait d'aller quelque part dans un vaste paysage dont ils n'apercevaient, quand tout allait bien, que le voisinage immédiat de leurs pieds. Quoi d'étonnant à ce que certains aient été frappés d'immobilité, à ce que d'autres aient trébuché à chaque pas, à ce qu'à défaut d'apercevoir le paysage, beaucoup se soient évadés dans un univers de sens parallèle, provoquant des cascades d'absurdités ? A défaut de sens contextuel, le sens étroit a prévalu : seules les instructions constantes et détaillées du maître permettaient d'assurer la marche. Une pensée sans contexte est une pensée sans recours et qui, par conséquent, se bloque. C'est une illusion de croire qu'un discours sera compris parce qu'il est simple (et la plupart des débuts axiomatiques sont simples). Une pensée privée de mobilité par manque de référents n'est pas en mesure de comprendre grand chose. Dix années d'expérience ont montré la contradiction sur laquelle ont buté les maths modernes : on ne pouvait pas à la fois commencer l'enseignement par des structures dépourvues de contexte *pour les élèves* et donner à ceux-ci une bonne part d'autonomie (celle vers laquelle poussait l'euphorie des années soixante et que les promoteurs de la réforme ont célébrée éloquemment).

A lire les programmes et plus d'un manuel d'aujourd'hui, nous avons apparemment compris cette leçon que nous ont donnée les maths modernes (et c'est là un point très positif de leur héritage). Nous n'avons pas renoncé, heureusement, à rapprocher les mathématiques scolaires des mathématiques vivantes au plan des contenus, mais nous voulons aussi les rapprocher au plan de la démarche : on parle partout de *construire la mathématique, d'activités mathématiques, de situations-problèmes,* etc.

Mais la pratique a-t-elle suivi le discours ? Arrivons-nous à situer notre enseignement mathématique au cœur même du paysage des élèves, des notions qui leur sont familières et qu'ils puisent dans le quotidien ou leur apprentissage mathématique antérieur ? Car c'est seulement dans ce paysage que leur pensée peut former des projets, trouver de l'inspiration et des recours en cas de panne. Proposons-nous aux élèves assez de problèmes *qui remettent leur savoir en cause* et les obligent à théoriser ? Ou au contraire leur enseignons-nous souvent des théories qui, à défaut d'un contexte problématique substantiel, ne peuvent être qu'illustrées et non appliquées (9) ? Ne nous arrive-t-il pas souvent d'épargner aux élèves la difficulté de démontrer, et par là même de leur cacher les raisons d'être des définitions dans leur forme précise et délicate (puisqu'elles ne revêtent cette forme que pour servir dans les preuves) ? Et cela sans parler de l'entraînement que nous organisons parfois à des calculs qui n'ont ni queue ni tête pour les élèves, puisque dans leur paysage ils ne viennent de nulle part et ne vont nulle part.

Quand notre enseignement est ainsi conçu, il est, essentiellement par défaut de problèmes sur le terrain des élèves, une entreprise assez formidable de conceptualisation prématurée. Non pas parce que les concepts en question seraient proposés à des élèves trop jeunes (on peut même croire que beaucoup d'apprentissages pourraient se faire plus tôt), mais bien, répétons-le, parce qu'on n'a besoin ni de concepts ni de théories pour répondre à des questions qu'on ne se pose pas. Nous transportons les élèves de leur terrain sur le nôtre. Sur celui-ci, ils sont aliénés du sens contextuel, et par conséquent confinés au seul sens qui reste, le sens étroit. Ne pouvant apercevoir la portée des concepts, ils croient que les définitions disent l'essence de certaines choses mystérieuses, dont on les prie de croire qu'elles sont importantes et utiles. Leur esprit est coincé. Le professeur garde seul l'initiative. C'est lui qui dit où il faut aller. Mais ses directives paraissent arbitraires.

Ce tableau est bien sombre, et sans doute est-il poussé à l'extrême pour des raisons de clarté. Néanmoins les difficultés sont là. Elles étaient là à l'époque des maths modernes. Elles sont toujours là aujourd'hui. Qui plus est, il ne faudrait sans doute pas fouiller longtemps pour les retrouver dans les mémoires de ceux qui ont été à l'école avant les maths modernes. Ces difficultés sont profondes, elles ont traversé les siècles. Les "maths modernes" ne les ont pas créées, mais en exaltant certaines d'entre elles, elles ont permis de les comprendre mieux. Quoi qu'il en soit, toutes les leçons de l'histoire ancienne et récente n'ont pas été tirées dans la pratique. Que faire ?

Que faire ?

Dans des classes encore trop peu nombreuses, des professeurs expérimentent une façon nouvelle, porteuse d'espoir, d'organiser l'apprentissage des mathématiques. Esquissons-la.

On présente aux élèves une situation problématique assez ample, contenant beaucoup d'objets et de relations. On leur pose, dans leur langage (familier et aussi plus ou moins mathématique selon leur âge), des questions nettes, c'est-à-dire telles que l'on puisse reconnaître quand on a une solution. Il ne faut pas non plus que toutes les solutions dépendent d'astuces de pensée. Chaque élève doit pouvoir construire quelque chose, avancer des pions. Il faut enfin que ces questions obligent à construire un morceau de théorie mathématique.

Cela semble faire beaucoup de conditions. Pourtant on connaît pas mal de situations problématiques de ce genre susceptibles chacune d'être prise puis reprise au cours des études, obligeant chaque fois à construire un peu plus de mathématiques. Citons-en quelques-unes :

- les problèmes isopérimétriques ;
- les sections du cube ou d'autres corps simples ;
- les problèmes d'existence de pavages ou de polyèdres de types donnés ;
- la mesure d'objets inaccessibles (la "grande géométrie" comme on l'appelle à l'IREM de Bordeaux ; elle conduit au théorème de Thalès, à la similitude et à la trigonométrie) ;
- les premiers processus infinis (des suites d'objets géométriques, cinématiques, numériques) ;
- les représentations planes d'objets de l'espace (projections orthogonale et parallèle, perspective conique) ;
- certaines classes d'expériences aléatoires ;
- les pavages de rectangles avec des carrés (conduisant au p.g.c.d., à la commune mesure, aux irrationnels) ;
- les surfaces définies par les fonctions de deux variables ;
- la construction des cartes de géographie ;
- les cadrans solaires et les éléments de la cosmographie ;
- etc.

Bien entendu, il faudrait encore montrer comment poser dans chaque cas et dans le langage des élèves (au milieu de leur paysage) des questions nettes, obligeant à théoriser et permettant à chacun de marquer des points. "Au milieu du paysage des élèves" : pour les plus jeunes, ce paysage n'est pas traversé par des frontières entre disciplines. Les mathématiques n'ont pas dans leur esprit une existence indépendante du reste, et pour eux toute évidence est bonne à prendre, d'où qu'elle vienne. Ils doivent encore apprendre, et c'est essentiel mais loin d'être immédiat, qu'une propriété géométrique constatée empiriquement, ce n'est pas la même chose que cette même propriété déduite dans le cadre d'une théorie donnée. Par contre, le "paysage" des élèves plus avancés contient plus de mathématiques, déjà plus sûres de leur statut. Les situations problématiques seront donc, pour eux, plus mathématisées dès le départ.

Pour qu'une situation problématique mobilise la pensée des élèves et que ceux-ci s'adjugent l'essentiel de l'initiative, il ne faut pas que le professeur les attende ailleurs que dans les questions posées. C'est le cas si celles-ci *illustrent* un point de théorie sans toutefois en imposer l'usage, et si néanmoins le professeur entend que la classe aboutisse à cette théorie. Les élèves sentent tout de suite qu'on veut les mener ailleurs que dans les problèmes de départ.

Si au contraire l'intérêt du professeur est congruent à celui des élèves, si le problème posé est bien le problème posé et ne cache aucune intention subreptice, si le défi est suffisant mais non trop grand, alors les élèves se mettent en marche, mobilisent leur pensée imaginative et critique. Ils font flèche de tout bois, entremêlant des expériences et des raisonnements (de courte portée au début). Ils tombent en arrêt devant les contradictions et paradoxes. Avec leurs connaissances acquises et leurs observations nouvelles, ils se mettent à construire des réponses organisées où les mathématiques ont leur part. Ils font, comme disait Valéry "des pas admirables dans les pas de leur raison". Et bien entendu, il faut les aider pour qu'ils rejoignent les mathématiques constituées.

Mais, objectera-t-on, il n'est pas si facile de mobiliser la pensée des élèves. Il arrive trop souvent que des enseignants, ayant mis leur espoir dans une situation problématique longuement mûrie, ne rencontrent que la lassitude de la classe. Comment concilier cette constatation décourageante avec le sentiment, fort lui aussi, qu'on trouve parfois la bonne stimulation et qu'alors "ils" démarrent ?

C'est sans doute qu'un élève (et *a fortiori* une classe) est un système incroyablement complexe, soumis à des déterminants physiologiques, psychologiques et sociaux inextricables. De sorte qu'il se trouve souvent des facteurs inattendus, ou même cachés, pour empêcher les démarches attendues. La présence même à l'école, ce lieu de beaucoup de contraintes, n'est pas la moindre de ces causes qui peuvent démobiliser un adolescent. Des souvenirs malheureux d'apprentissages mathématiques antérieurs en sont une autre. Outre ces deux là, il y en a à n'en plus finir...

Les mathématiques sont une face de la pensée

Quoi qu'il en soit, ne suffit-il pas d'avoir vu un élève une seule fois se mettre à penser et agir sur un chantier de problèmes à sa portée pour savoir que la pensée mathématisante est latente dans son esprit ? Et le grand nombre de fois où l'on constate un éveil de ce genre, fut-il éphémère, n'incite-t-il pas à croire que la pensée mathématisante est latente dans tout esprit ? Et enfin, n'est-ce pas parce que l'imagination et la logique appartiennent à l'essence même de la pensée que celle-ci, sollicitée du côté des figures et des nombres, et non entravée par ailleurs, se met à esquisser des mathématiques ? Si ces affirmations ne sont que vraisemblables, si elles paraissent, par nature, impossibles à prouver, n'importe-t-il pas néanmoins, pour chaque personne et pour la société, d'en faire le pari ?

Si l'on accepte ces conclusions, les mathématiques n'ont rien d'une discipline à part, située à côté de la pensée commune, et qui pourrait faire l'objet pour certains d'un supplément d'instruction. Elles sont, pour ainsi dire, *une face de la pensée*. Il n'y a pas des esprits concrets à côté des esprits abstraits. Toute pensée est conceptualisante par nature et encline aux mathématiques.

Mais alors, la réponse à la question "Enseigner les mathématiques, pour qui ? Pourquoi ?" devient évidente. De quel droit amputerait-on, par défaut d'enseignement, la pensée de quelqu'un de sa face mathématique ? Ne pas éduquer mathématiquement un enfant, c'est mutiler, défigurer sa pensée. Il faut enseigner les mathématiques à tous. Avec une restriction majeure : tout citoyen a le droit d'être préservé des mathématiques réduites au sens étroit. Tout citoyen a droit au sens, dans l'acception la plus pleine du mot.

Remerciements

Merci aux membres du Groupe d'Enseignement Mathématique pour tant de discussions fructueuses.

NOTES

(1) Why math ? *Because*. C'est la conclusion de U. Dudley analysant l'ouvrage *Why Math ?* de R.P. Driver (Springer, New York, 1984) dans Amer. Math. Monthly 94 (1987), 479-483.

(2) On peut discuter de l'opportunité du mot *sens* dans cette acception, alors que ce qui est en cause est proche de la syntaxe du discours mathématique. Mais là n'est pas notre propos.

(3) Sur les unités de sens emboîtées et la construction du sens, cf. G. Bateson, Communication, dans Y. Winkin (éditeur), *La nouvelle communication*, Ed. du Seuil, Paris, 1981 ; p. 127.

(4) I. Lakatos, *Proof and refutations, The logic of mathematical discovery*, Cambridge Univ. Press, 1976.

(5) H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1947 ; J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1975.

(6) *Op. cit.*

(7) N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (éditeur), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.

(8) P.J. Hilton, *Le langage des catégories*, trad. par J.C. Matthys, CEDIC, Paris, 1973.

(9) Il pleut des exemples d'enseignements théoriques embrayant sur des problèmes trop ténus. En voici un. On s'obstine en Belgique à enseigner l'axiomatique des probabilités de Kolmogorov à des élèves qui, pendant longtemps, et pour certains définitivement, ne traiteront que des cas finis. Ce qui a deux conséquences majeures : la première est que les débutants doivent se dépêtrer avec un niveau ensembliste de plus que dans l'axiomatique élémentaire (ce qui n'est pas rien : il est plus difficile de jouer avec un ensemble de parties d'un ensemble qu'avec seulement les éléments de ce dernier) ; la seconde est que lorsque certains élèves arrivent à des cas infinis, qui justifient vraiment l'axiomatique de Kolmogorov, il leur est bien difficile de percevoir l'enjeu par contraste, puisqu'à ce stade ils n'ont pas réalisé que cette axiomatique est trop générale pour le cas fini. Quant à ceux, nombreux, qui en restent aux cas finis, ils ne comprennent jamais ce qu'on leur a voulu avec cette grosse machine.