

# *mathématiques ici et ailleurs*

---

## *l'enseignement des mathématiques en RFA*

*par Richard Cabassut*

Voici quelques réflexions suite à l'atelier "mathématiques à l'étranger" des journées nationales de Metz.

### **Quelques conditions socio-culturelles et économiques**

**Système décentralisé :** l'organisation de la RFA est fédérale. Chaque Land a souveraineté culturelle pour organiser son système scolaire (type d'école, programmes, formation des enseignants, vacances scolaires, enseignement supérieur). Par exemple les différences entre les Länder posent des problèmes pour les familles qui changent de résidence ou pour un enseignant qui change de Land et qui doit parfois passer un examen supplémentaire. La réforme scolaire de la Gesamtschule ne se développe que dans certains Länder (souvent à majorité SPD).

**Baisse démographique :** elle entraîne une baisse des effectifs des classes, la fermeture d'écoles, la réduction du recrutement d'enseignants et un vieillissement du corps enseignant.

**Valorisation de la formation professionnelle :** les formations professionnelles et techniques scolaires et en entreprise sont plus répandues qu'en France et y jouissent d'une meilleure réputation. La reproduction par l'école de la division sociale semble bien acceptée. L'image de l'ouvrier qualifié (Facharbeiter) paraît positive. Parmi les filières de formation professionnelle la plus répandue est la formation en alternance école (Berufsschule)-entreprise (Duales System). Elle apparaît comme une institution d'intégration sociale de la majorité de la jeunesse. Les jeunes reçoivent une rémunération même lorsque la formation se fait sous forme scolaire uniquement, sans participation au travail productif. L'apprentissage est lui aussi valorisé (60 % des titulaires de l'Abitur (baccalauréat) qui ne s'engagent pas dans l'enseignement supérieur complètent leur formation générale par un apprentissage en entreprise). Le rapport du salaire moyen non ouvrier au salaire moyen ouvrier est plus faible en Allemagne qu'en France. La hiérarchisation ouvrière est influencée par niveau atteint dans la formation professionnelle alors qu'en France le pouvoir discriminatoire est joué par le niveau atteint dans la formation générale. Pour les

non-ouvriers (employés et cadres) la hiérarchie est marquée par une progression sans rupture de la qualification professionnelle. En France la qualification professionnelle est concentrée dans le haut de la hiérarchie. On notera enfin qu'en Allemagne le chômage frappe les jeunes moins durement qu'en France (parmi les moins de 24 ans, 9,5 % de chômeurs en RFA contre 25,6 % en France). L'apprentissage ne débouche sur le chômage que pour 9 % des apprentis.

## L'organisation du système éducatif

On remarque la diversité des établissements scolaires exposés dans le tableau (cf. annexe) du système éducatif en Sarre. Une première orientation dès la fin de la *Grundschule* (vers 10 ans) propose la *Hauptschule* (sorte de primaire supérieure ou classes de fin d'étude avant l'entrée dans la vie active), la *Realschule* (sorte de secondaire court, limité au premier cycle, avec possibilité de passage dans le secondaire long) et le *Gymnasium* (enseignement secondaire général long de type lycée). La *Gesamtschule* (introduite dans les années 70 et restant très minoritaire) propose un enseignement non différencié du type collège Haby et prépare en second cycle, tout comme le *Gymnasium*, à l'*Abitur* (baccalauréat).

L'enseignement technique et professionnel est assuré pour la formation en alternance en entreprise (apprentissage ou temps d'études dans les salles de cours de l'entreprise ou travail productif) et à l'école professionnelle, la *Berufsschule*, qui accueille essentiellement des élèves venant de la *Hauptschule*. La *Fachoberschule* accueille plutôt les élèves issus de la *Realschule* pour une formation à temps plein ou en alternance et permet d'accéder aux écoles techniques supérieures (*Fachhochschulen*). Les *Fachschulen* préparent à temps plein ou en alternance les élèves issus de la *Berufsschule* ou de la *Fachoberschule* aux diplômes de maîtrise et de techniciens et permettent l'accès aux *Fachhochschulen*.

L'année scolaire est organisée en deux semestres. Les grandes vacances sont plus courtes (6 semaines) alors que les petites vacances sont plus longues. La scolarité en lycée dure une année de plus par rapport à la France. Les cours sont concentrés le matin, en 6 séquences de 45 minutes et deux récréations de 15 minutes, de 8 heures à environ 13 heures.

La structure administrative est légère. Ce sont les professeurs qui se répartissent les tâches. Le directeur et le sous-directeur, nommés par le Ministère, conservent quelques heures d'enseignement. Les professeurs assurent la surveillance des classes dont un professeur est absent. Ainsi en Sarre dans votre emploi du temps est-il prévu que tel jour de la semaine à telle heure précise vous soyez disponible, en salle de professeurs, pour éventuellement surveiller les classes dont un professeur est absent. La surveillance des couloirs et des cours de récréation est répartie entre professeurs au début de l'année. La gestion des absences d'élèves et les contacts avec les parents sont assurés par le professeur principal... Certains profes-

seurs sont déchargés partiellement de cours pour s'occuper de la bibliothèque, ou concevoir les emplois du temps, ou s'occuper de l'intendance, ou coordonner le travail des collègues d'une même discipline. Dans le Bade-Wurtemberg dans chaque discipline un collègue a droit de regard pédagogique sur le travail de ses autres collègues (sorte d'inspecteur "maison"). Que l'on se rassure ! il subsiste un ou deux secrétaires et du personnel de nettoyage.

Pour l'orientation et l'évaluation en Gymnasium, en classe 5 et 6, comme les redoublements sont non autorisés (sauf cas très exceptionnel), il y a possibilité de réorientation à l'amiable (souvent vers la Realschule). En premier cycle on distingue les disciplines fondamentales (allemand, mathématiques, langues vivantes) et les disciplines secondaires. En second cycle on distingue les matières à performance (trois matières choisies parmi différentes combinaisons) et les matières normales obligatoires.

Pour le contrôle des connaissances l'année scolaire est organisée en semestres. Chaque semestre, trois compositions écrites ont lieu dans les disciplines fondamentales ou à performance. Les énoncés des compositions doivent être établis de telle manière que leur difficulté et le volume des travaux qu'ils impliquent ne doivent pas dépasser les possibilités d'un élève moyen. Les élèves n'effectueront pas par jour plus d'une, par semaine plus de trois compositions. Si plus d'un tiers des élèves n'a pas atteint la moyenne la composition est invalidée et doit être recommencée. En classes 12 et 13 mêmes dispositions si plus de la moitié des élèves n'ont pas la moyenne. Dans les disciplines secondaires ou normales les compositions ne peuvent pas durer plus de 20 minutes.

Pour le passage en classe supérieure, dans le premier cycle on effectue une moyenne arithmétique des notes dans les différentes matières obligatoires (même coefficient 1). Est admis à passer dans la classe supérieure tout élève qui :

- a la moyenne générale supérieure ou égale à la moyenne,
- n'a pas plus de deux notes au-dessous de la moyenne dont au plus une seule dans une matière fondamentale et à condition qu'elle ne soit pas trop faible.

Pour le second cycle le système est plus complexe du fait des nombreux choix de combinaisons de matières. Dans la pratique si les résultats obtenus permettent de pronostiquer un échec à l'Abitur on conseille le redoublement.

Pour le baccalauréat, les différentes matières interviennent par la prise en compte des notes de la classe 12 et du premier semestre de la classe 13, par la prise en compte des notes d'écrit dont les épreuves se déroulent au début du second semestre, puis par la prise en compte des notes attribuées en fin de deuxième semestre bien après les épreuves écrites et enfin par la prise en compte des notes d'oral de la fin du deuxième

semestre. L'ensemble est très complexe et, une fois les notes obtenues, il n'y a pas de discussion possible comme c'est le cas pour certains jurys de baccalauréat français : le verdict informatique tombe au dixième de point près.

Un élève est corrigé pour l'écrit une première fois par son professeur puis par un correcteur du même lycée. De même pour l'oral, le professeur de l'élève lui soumet un sujet qu'il prépare pendant 30 minutes. Puis son professeur l'interroge pendant 10 minutes. Puis un interrogateur extérieur interroge pendant 10 minutes sur tous les thèmes possibles.

Les enseignants sont polyvalents (deux matières en Gymnasium et en Realschule, plusieurs matières en Grundschule et Hauptschule). Ils doivent être titulaires de l'Abitur et suivre une formation soit dans un institut pédagogique (type école normale) pendant trois ans pour les Grundschule et Hauptschule, soit pour les Realschule et les Gymnasium à l'université pendant trois à quatre ans validés par un premier examen d'état et suivi d'un stage d'un an et demi (service partiel d'enseignement et séminaires pédagogiques) validé par un deuxième examen d'état. Le statut de l'enseignant dépend du type d'école où il enseigne (par exemple 24 séquences d'enseignement par semaine en Gymnasium, 26 en Berufsschule, 27 en Realschule, 28 en Grundschule et Hauptschule). A la différence de la France, des enseignants du même type d'école ont en règle générale même statut et mêmes conditions de travail.

### L'enseignement des mathématiques en Sarre

La répartition hebdomadaire de l'enseignement des mathématiques est de 3 à 4 séquences (de 45 minutes) à la Grundschule et de 3 à 5 séquences ailleurs. Dans la filière Gymnasium on a la répartition suivante du nombre de séquences hebdomadaires en fonction de la classe:

	Classe								
	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Option :									
Lettre .....	5	5	4	4	4	3	3	3	3
Science.....	5	5	4	4	5	5	5	5	5

(On appelle option science le cas où les mathématiques seront ou sont choisies comme matière à performance).

Les mathématiques sont discipline fondamentale dans le premier cycle. Dans le 2<sup>e</sup> cycle, en Sarre, les mathématiques sont obligatoires dans toutes les 24 combinaisons possibles parmi lesquelles 11 combinaisons où les mathématiques sont matière à performance et 15 combinaisons où les mathématiques ont une épreuve obligatoire au baccalauréat.

Pour le baccalauréat, l'épreuve écrite pour les mathématiques matière à performance dure 5 heures et comporte 5 devoirs indépendants. Le premier devoir (épreuve 1) porte sur le programme d'analyse de la classe 12 ; le deuxième devoir (épreuve 2a) a pour thème la géométrie métrique de l'espace, le troisième (épreuve 2b) l'algèbre linéaire. Le quatrième devoir (épreuve 3) porte sur l'analyse plus théorique et exige la connaissance des théorèmes du cours. Le cinquième devoir (épreuve 4) traite des probabilités. L'ensemble est noté sur 60 points avec 20 points pour le premier devoir et 10 points pour chacun des quatre autres. Le niveau de difficulté des épreuves est organisé dans les termes suivants :

*« chacune des quatre épreuves doit contenir un échelonnement des difficultés le plus large possible. Les épreuves 1 et 2a seront de difficulté faible à moyenne, tandis que les épreuves 2b et 3 contiendront des éléments de niveau d'exigence plus élevé. Le niveau de l'ensemble des épreuves d'examen doit être tel qu'après un barème raisonnable le rapport entre le niveau d'exigence et le pourcentage des points d'évaluation soit approximativement le suivant :*

Niveau d'exigence	Pourcentage des points
I bas .....	30 %
II moyen .....	60 %
III élevé .....	10 %

Suit une série de conseils généraux pour élaborer un sujet satisfaisant à l'équilibre des niveaux d'exigence. Les programmes de classe 12 et du premier semestre de classe 13 sont les bases de l'examen mais tous les points du programme ne sont pas exigibles à l'examen. Est dressée la liste des objectifs, savoir et savoir-faire pour chaque type d'épreuve. Enfin sont proposés des exemples de devoirs avec des barèmes détaillés et des consignes de correction très explicitées. Dans la note de mathématiques du baccalauréat les notes de classe 12 et 13 interviennent. On notera donc l'existence de 4 épreuves indépendantes, couvrant toutes les parties du programme, et conçues pour qu'un élève moyen réussisse.

### **Prudence dans l'observation**

Seule une étude précise conduite dans le cadre des sciences de l'éducation permettrait d'approcher avec rigueur des réponses à nos questions. Les conditions sociales, culturelles, politiques et économiques, si différentes d'un pays à l'autre, doivent nous inviter à rejeter les réponses rapides, les transpositions hâtives d'un pays à l'autre, les comparaisons normatives. Notamment, si nous avons longuement insisté sur la formation en alter-

nance c'est pour mieux comprendre un système de formation et non pour proposer un modèle. Près de 70 % des apprentis sont dans des entreprises de moins de 50 salariés ; or plus une entreprise est petite, plus il est difficile de contrôler la qualité de la formation. Ainsi une étude montrait-elle que dans les entreprises employant de 25 à 100 salariés, 71 % des apprentis déclaraient faire des travaux sans rapport avec le métier préparé. "*Pour avoir fréquenté la Berufsschule quelques heures par semaine et travaillé le reste du temps, les apprentis des petites et moyennes entreprises possèdent-ils réellement une formation professionnelle ?*" (extrait de bibliographie 7).

Il nous faut rester prudent dans notre observation qui reste très incomplète. Nous nous limitons à un seul Land de RFA : la Sarre. De même on peut s'étonner de l'absence, dans cette étude, de références aux pratiques pédagogiques, à la didactique des mathématiques et aux élèves dans leurs relations à l'enseignement des mathématiques. Ces thèmes mériteraient à eux seuls une autre étude.

Il faut être tout aussi prudent dans les observations sur la différence du poids de l'enseignement des mathématiques dans les sections scientifiques entre la France et la Sarre. Certes, l'enseignement des mathématiques semble plus pragmatique en Sarre qu'en France. La bivalence de tous les professeurs de mathématiques, l'ambition mesurée au niveau des programmes et des horaires expliquent ce pragmatisme. D'autres facteurs plus difficiles à cerner interviennent : notre tradition cartésiano-bourbakiste, le rôle des classes préparatoires et des grandes écoles scientifiques en France, la volonté d'ouvrir le Gymnasium à davantage d'élèves en réduisant l'importance des disciplines scientifiques (cf. bibliographie 2), le refus en RFA d'une trop grande spécialisation et d'une hiérarchisation des filières (en RFA pour certains numéris clausus d'entrée à l'université c'est plus la moyenne générale au baccalauréat qui importe que l'option choisie au bac).

Ce rapide, partiel et partial aperçu sur l'enseignement des mathématiques en Sarre voudrait susciter la curiosité (cf. bibliographie) et ouvrir notre réflexion aux différences.

Alors, bon questionnement !

## **Bibliographie**

1. *Politique d'éducation et d'organisation industrielle en France et en Allemagne* par Maurice, Sellier, Silvestre ; éditions PUF, 1982.
2. *Les journées nationales de la M.N.U. du 14 au 19 avril 1984 à Sarrebruck* par Berger, bulletin A.P.M.E.P. 348, 1984.

3. *Réforme du système éducatif en Sarre* par Borger et Krauss, bulletin A.P.M.E.P. 327, 1981.
4. *Enquêtes sur les structures administratives des établissements scolaires, secondaires dans plusieurs pays étrangers* par A.P.M.E.P., Irem de Bordeaux, 1986.
5. *Mathématiques comparées* par Bigard, Irem de Nantes.
6. *Etudes comparatives sur l'enseignement des mathématiques pour les enfants de 10-16 ans dans différents pays étrangers*, Irem de Rouen, à paraître.
7. *L'école et l'entreprise, l'expérience des deux Allemagne*, Tanguy, Kieffer, documentation française, notes et études documentaires, 28 mai 1982.
8. *Le débat sur l'école : éléments de réflexion*, problèmes économiques et sociaux, 25 janvier 1985.
9. *Les entreprises allemandes sont aussi des écoles*, journal Le Monde, 22 janvier 1987.

## ANNEXE 1

### Tableau du système éducatif en Sarre

AGE	CLASSE	TYPE D'ECOLE																
5 - 6	0	Maternelle (Kindergarten)																
6 - 7	1	Ecole Primaire (Grundschule) (à Berlin et Haubourg, l'école primaire peut durer jusqu'à la classe 6)																
7 - 8	2																	
8 - 9	3																	
9 - 10	4																	
Premier Cycle du second degré																		
10 - 11	5	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 25%;">Hauptschule</td> <td style="width: 25%;">Realschule</td> <td style="width: 25%;">Gymnasium</td> <td style="width: 25%;">Gesamtschule</td> </tr> <tr> <td>5 → 9 (ou 10)</td> <td>5 → 10</td> <td>Lycée scientifique ou de langues.</td> <td>Collège d'enseignement secondaire</td> </tr> <tr> <td></td> <td>EXAMEN "MITTELREIFE" (B.E.P.C.)</td> <td>5 → 13</td> <td>5 → 13</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Passerelle</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Hauptschule	Realschule	Gymnasium	Gesamtschule	5 → 9 (ou 10)	5 → 10	Lycée scientifique ou de langues.	Collège d'enseignement secondaire		EXAMEN "MITTELREIFE" (B.E.P.C.)	5 → 13	5 → 13		Passerelle		
Hauptschule	Realschule		Gymnasium	Gesamtschule														
5 → 9 (ou 10)	5 → 10		Lycée scientifique ou de langues.	Collège d'enseignement secondaire														
	EXAMEN "MITTELREIFE" (B.E.P.C.)		5 → 13	5 → 13														
	Passerelle																	
11 - 12	6																	
12 - 13	7																	
13 - 14	8																	
14 - 15	9																	
15 - 16	10																	
Deuxième Cycle du second degré (Oberstufe)																		
16 - 17		<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 25%;">Berufsschule (professionnelle) 2 à 3 ans</td> <td style="width: 25%;">Fachoberschule technique 2 ans</td> <td style="width: 25%;">Gymnasium avec 2d Cycle réformé</td> <td style="width: 25%;">Gesamtschule avec 2d Cycle</td> </tr> </table>	Berufsschule (professionnelle) 2 à 3 ans	Fachoberschule technique 2 ans	Gymnasium avec 2d Cycle réformé	Gesamtschule avec 2d Cycle												
Berufsschule (professionnelle) 2 à 3 ans	Fachoberschule technique 2 ans	Gymnasium avec 2d Cycle réformé	Gesamtschule avec 2d Cycle															
17 - 18		<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">classe 11</td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> </table>			classe 11													
		classe 11																
18 - 19		<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">classe 12</td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> </table>			classe 12													
		classe 12																
19 - 20		<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 25%;">Fachschule (2 ans)</td> <td style="width: 25%;">Fachhochschule (2 ans) technique supérieur</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">classe 13 → ABITUR</td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> </table>	Fachschule (2 ans)	Fachhochschule (2 ans) technique supérieur	classe 13 → ABITUR													
Fachschule (2 ans)	Fachhochschule (2 ans) technique supérieur	classe 13 → ABITUR																
		Université																

**Remarques :**

- quelques classes passerelles (→ → →) permettent en principe de changer de filières, mais elles sont peu fréquentées ;
- la classe 10 de la Hauptschule est peu fréquentée, ainsi en Sarre le rapport entre le nombre d'élèves de classe 10 et le nombre d'élèves de classe 9 était en 1985 de 1,66 %.

**Répartition des élèves suivant le type d'établissement (1985) :**

- 65 800 en classes préscolaires (Kindergärten)
- 7 114 600 en écoles de formation générale dont :
  - 53,8 % en Grundschule et Hauptschule
  - 3,8 % en Sonderschule (école spécialisée pour handicapés)
  - 14,7 % en Realschule
  - 24,6 % en Gymnasium
  - 3 % en Gesamtschule
- 41 300 élèves en formation continue dont :
  - 23,7 % en Realschule du soir (cours du soir)
  - 39,4 % en Gymnasium du soir (cours du soir)
  - 36,8 % en Kollegs (écoles à plein temps pour adultes)
- 2 778 900 en formation professionnelle dont :
  - 72,8 % en Berufsschule
  - 14,2 % en Berufsfachschule (école professionnelle à temps complet, sans alternance, essentiellement pour les professions de bureau)
  - 5 % en Fachoberschule ou Fachgymnasium
  - 7,6 % en Fachschule

**Orientation à la sortie du primaire**

La répartition à la sortie de l'enseignement primaire, en classe 6, est en 1985/86, pour le land de Sarre (les statistiques fédérales ne distinguent pas Grundschule et Hauptschule du fait des différences d'un Land à l'autre) :

- 54,4 % en Hauptschule
- 14,93 % en Realschule
- 30,61 % en Gymnasium

En 1979, en RFA, *parmi les jeunes de 17 ans :*

- 20,4 % fréquentaient le Gymnasium
- 52,7 % la Berufsschule
- 7,9 % la Berufsfachschule
- 2 % la Fachoberschule

**Evolution démographique**

Rapport entre le nombre d'élèves en 1985 et le nombre d'élèves en 1977 (en RFA) :

- 83,60 % Préscolaire (Kindergärten)
- 71,83 % Ecoles de formation générale (Grund, Real, Hauptschule, Gymnasium)
- 113,77 % Ecoles de formation générale continue (adultes)
- 120,62 % Ecoles professionnelles (Berufsschule)
- 123,80 % Ecoles de formation professionnelle continue (adultes)

Répartition des classes par effectifs en Sarre, en 1985/86 :

Nombre d'élèves dans la classe	jusqu'à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Grund et Hauptschule .....	55,24 %	35,14 %	9 %	0,16 %	0 %
Realschule .....	22,46 %	46,08 %	28,11 %	3,32 %	0 %
Gymnasium .....	30,6 %	35,3 %	28,84 %	3,63 %	0,27 %

Répartition des professeurs selon l'âge, en Gymnasium, en Sarre, en 1985/86 :

Age	Pourcentage
<30	2,25 %
30 à 35	18,54 %
35 à 40	19,70 %
40 à 45	21,30 %
45 à 50	16,25 %
50 à 55	11,22 %
55 à 60	7,7 %
60 à 65	2,8 %
>65	0,11 %

**Références**

Statistisches Handbuch für das Saarland, 1986, Grund- und Strukturdaten, Der Bundesminister für Bildung und Wissenschaft, 1981, Annuaire statistique de RFA, 1986.

**ANNEXE 2****Niveau de difficulté des épreuves de baccalauréat en mathématiques**

"... Le niveau d'exigence I comprend :

- la restitution des faits (par exemple données, règles, formules, propositions) issus d'un domaine limité de ce qui est étudié ;
- la description et l'application de techniques de calcul et de procédures apprises et pratiquées dans un domaine limité et dans un contexte déjà rencontré.

*Le niveau d'exigence 2 comprend :*

- les classifications, choix, traitements, expositions autonomes (sans indications préalables) de plusieurs faits connus d'après des points de vue donnés dans un contexte connu et déjà pratiqué ;
- transposition autonome (sans indications préalables) des connaissances en une situation nouvelle comparable, le cas échéant on peut envisager un changement de procédures ou de relations de faits.

*Le niveau d'exigence 3 comprend :*

- le traitement planifié de données complexes dans le but d'obtenir des solutions, des configurations, des déductions, des arguments, des évaluations autonomes (sans indications préalables) ;
- la capacité de choisir de manière autonome parmi les méthodes ou les procédures de solution apprises, celle qui est convenable pour la résolution du devoir ou de les adapter à une nouvelle situation...

*Le niveau de l'ensemble des épreuves de l'examen doit être tel qu'après un barème raisonnable le rapport entre le niveau d'exigence et le pourcentage des points d'évaluation soit approximativement le suivant :*

Niveau d'exigence	Pourcentage des points
1 bas	30 %
2 moyen	60 %
3 élevé	10 %

Traduction d'extraits de "Beispiele für Prüfungsaufgaben der schriftlichen Abiturprüfung in der gymnasialen Oberstufe im Fach Mathematik".

Ce document sur le niveau d'exigence au baccalauréat peut éventuellement servir de référence en cas de recours juridique d'un candidat au baccalauréat.

## ANNEXE 3

### Programme en Gymnasium

Voici un exemple de progression en Gymnasium. Dans le premier cycle, en classe 5 : calcul sur les entiers naturels, géométrie de base (point, droite, plan, solide) ; en classe 6 : calcul sur les entiers relatifs et les fractions, multiples, diviseurs, nombres premiers, équation linéaire, poursuite géométrie de base (symétrie, translation) ; en classe 7 : calcul (proportion, pourcentage, intérêts) et les fonctions simples (linéaire, inverse), la géométrie plane (point, droite, cercle, angle, distance, axe de symétrie, triangle, parallélisme, figures isométriques (cas des triangles) ; en classe 8 : calcul algébrique et littéral (équations, inéquations) et étude des quadrilatères (aires) ; en classe 9 : nombres réels, équations du second degré et fonctions associées (notamment racine carrée), propriétés métriques du triangle

rectangle (sans trigonométrie), calcul vectoriel, les règles de similitudes (cas des triangles), les puissances, la division polynomiale, les fonctions (parité, monotonie, injectivité, réciproque) et en supplément pour l'option scientifique les problèmes d'optimisation et les coniques ; en classe 10 : puissances rationnelles et irrationnelles, propriétés des fonctions en introduisant les fonctions logarithmes et exponentielles, trigonométrie plane et fonctions trigonométriques, cercle et disque, stéréométrie, et en supplément pour l'option scientifique suites arithmétiques et géométriques et leurs séries, la trigonométrie sphérique, nombres complexes ; en second cycle en classe 11 : analyse (limite, continuité, étude des fonctions) ; en classe 12 : en analyse primitives et intégration, logarithmes et exponentielles, en géométrie espaces vectoriels et euclidiens, équations de plans et de droites dans l'espace, problèmes d'intersection de plans et de droites, de distances et d'angles (les espaces affines, les applications affines et linéaires, les isométries ne sont pas étudiées) ; en classe 13 : probabilités.

Détaillons ces programmes en traduisant un extrait concernant les coniques pour les élèves de classe 9 qui suivent l'option science :

“... 9.2 : hyperbole

9.2.1 : l'élève connaît la définition suivante d'une hyperbole. Définition : l'ensemble des points dont la différence des distances à deux points fixes, les foyers, est constante s'appelle une hyperbole.

9.2.2 : il peut construire une hyperbole de foyers et de différence de distance donnés à l'aide d'une famille de cercles concentriques.

9.2.3 : il sait déterminer les sommets, le centre, les foyers, l'axe focal.

9.2.4 : il sait qu'une hyperbole est symétrique par rapport à l'axe focal, par rapport à la perpendiculaire à cet axe passant par le centre, par rapport au centre.

9.2.5 : il sait que l'hyperbole de différence des distances aux foyers  $d$  a une distance entre les sommets de  $d$ .

9.2.6 : il sait qu'une hyperbole de différence de distances aux foyers  $2a$  et de foyers  $F(-e, 0)$  et  $F'(e, 0)$  a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } b^2 = e^2 - a^2$$

9.2.7 : il sait que l'hyperbole d'équation de la forme précédente a des asymptotes d'équation :  $y = \frac{b}{a}x$  et  $y = -\frac{b}{a}x$

9.2.8 : il peut tracer une hyperbole connaissant un sommet et ses asymptotes.

9.2.9 : il sait qu'une équation de la forme  $ux^2 - vy^2 = w$  où  $u$ ,  $v$  et  $w$  strictement positifs est une équation d'hyperbole. Il peut en déduire  $a$ ,  $b$  et  $e$ ...”

## ANNEXE 4

### Exemple d'épreuve d'Abitur

On notera que l'épreuve est conçue pour qu'un élève moyen la réussisse.

L'élève dispose d'un formulaire de mathématiques de 40 pages, indiquant notamment les définitions, les formules, les principales propriétés du cours dans tous les domaines, comme le suggère la table des matières : logique, théorie des ensembles, calcul et algèbre, géométrie du plan et de l'espace, trigonométrie, vecteurs, géométrie analytique, analyse et calcul différentiel, équations différentielles, suites, dénombrements et probabilité, algèbre de Boole, relations, structures algébriques, algèbre linéaire. Ainsi sont par exemple rappelées les définitions et propriétés des fonctions logarithmes, des nombres complexes, des suites arithmétiques et géométriques, les formules trigonométriques, les dérivées et primitives des fonctions usuelles, les opérations sur les dérivées, primitives et les différents théorèmes du calcul intégral.

On notera que les devoirs sont indépendants et qu'à l'intérieur de chaque devoir on essaie, dans la mesure du possible, de poser des questions indépendantes entre elles, quitte à rappeler un résultat intermédiaire (dans le devoir 2a une équation du plan demandée à la question 1 est donnée en 2).

On terminera en évoquant les problèmes de traduction d'un tel sujet. Il n'est jamais fait mention d'un repère de référence tant pour les représentations de courbes que pour les problèmes de géométrie. On suppose donné une fois pour toute un repère (ou une base) orthonormé de référence auquel on rapporte les représentations de courbe, les points ou les vecteurs. On caractérise les droites ou plans par une formulation simple :

"soit la plan  $P : 2x - y + 2z - 15 = 0$ " ou encore

"soit la droite  $d : M = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ".

Dans le formulaire de mathématiques on n'hésite pas à écrire pour les nombres complexes  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\ln z = \ln|z| + i\theta \pm 2n\pi i$ . La rigueur rédactionnelle de certains professeurs de mathématiques français est abandonnée au profit de notations plus simples et plus suggestives. On se souvient alors que les professeurs de mathématiques allemands sont bien souvent professeurs de physique ou chimie (les programmes français suivraient-ils cette direction puisqu'on a décidé de confondre angle et mesure d'angle ?).

### Epreuve écrite de l'Abitur 1986 (Sarre)

Durée : 5 heures

Formulaire mathématique et calculatrice autorisés.

Devoir 1 (20 points)

Soit l'ensemble des fonctions

$$f_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f_a(x) = \frac{x^3 + a}{(x+1)^2}, a \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

1. Déterminer les fonctions de cet ensemble dont la courbe représentative admet un point d'inflexion en lequel la tangente est parallèle à l'axe des  $x$ .

2. Montrer que toutes les fonctions de cet ensemble ont une asymptote oblique commune dont vous donnerez une équation.

3. Calculer l'angle avec lequel la courbe représentative de  $f_2$  coupe l'asymptote.

4. Etudier la fonction  $f_0$ .

5. Les courbes représentatives de  $f_0$  et de  $f_2$  déterminent dans le premier quadrant une surface illimitée. Montrer que l'aire de cette surface est finie.

**Devoir 2a (10 points)**

Soient les points  $A(5, 1, 3)$  ;  $B(0, 1, 8)$  ;  $C(-1, -3, 7)$  ;  $D(-2, -4, 3)$  et la droite  $d$  passant par  $F(7, -3, 8)$  et dirigée par le vecteur de coordonnées  $(4, 1, 1)$ .

1. Déterminer une équation du plan passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Montrer que  $D$  n'appartient pas à ce plan.

2. Calculer la distance du point  $D$  au plan  $P$  d'équation :  $2x - y + 2z - 15 = 0$ .

3. Déterminer le symétrique  $D'$  de  $D$  par rapport à  $P$ .

4. Calculer l'angle entre la droite  $d$  et le plan  $P$ .

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite projetée orthogonale de  $d$  sur  $P$ .

**Devoir 2b (10 points)**

1. Soit la loi "o" définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $aob = (1 - m)a + b$  où  $a$  et  $b$  réels. Déterminer les valeurs du réel  $m$  pour lequel "o" est associative.

2. Soient les vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  :

$$a = (1, -k, 0), b = (0, 1, k), c = (k-1, 0, 2k) \text{ où } k \text{ réel}$$

2.1 Déterminer  $k$  tels que  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient liés.

2.2 Montrer que pour  $k=2$  l'ensemble  $U$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 4x + 2y - z = 0\}$$

2.3 Déterminer une base et la dimension de  $U$ .

2.4 Pour quelle valeur du réel  $t$  a-t-on :

$$(t, -t, 2t) \in U ?$$

### Devoir 3

1. Soit  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction dérivable telle que :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \text{ et } f(1) = \frac{2}{e}$$

Déterminer  $F$ .

2. Soit l'ensemble des fonctions :

$$F_a: [\ln a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{-\ln a}^x 4(ae^{-t} - e^{-2t}) dt, a \in \mathbb{R}^+$$

2.1 Montrer que  $F_a$  est strictement monotone.

2.2 Montrer que  $F_a$  vérifie :

$$F_a(x) = 2(a - e - x)^2$$

2.3 Montrer que l'ensemble image de  $F_a$  est  $]0, 2a^2[$ .

2.4 Déterminer l'expression de la fonction réciproque de  $F_a$ .

### Devoir 4 (10 points)

1. Dans une urne se trouvent 5 boules : 3 blanches, 1 noire, 1 rouge.

1.1 On tire simultanément 2 boules. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "2 boules blanches"

B : "exactement 1 blanche"

C : "pas de blanche"

D : "au moins 1 blanche"

1.2 On tire une boule aussi longtemps qu'on n'a pas tiré deux boules blanches.

1.2.1 Déterminer l'univers des possibles et la loi de probabilité.

1.2.2 Calculer la probabilité de l'événement E : "une boule rouge est tirée".

2. Sur une portion d'autoroute en moyenne 60 % des automobilistes respectent la limitation de vitesse.

2.1 Quelle est la probabilité que parmi 15 automobilistes choisis au hasard tous respectent la limitation de vitesse ?

2.2 Quelle est la probabilité que parmi 15 automobilistes choisis au hasard au maximum 2 ne respectent pas la limitation de vitesse ?