dérivées : de la géométrie à l'algèbre

par M. Motti
Professeur d'E.N.N.A.
M. Locatelli
Professeur de L.E.P. (stagiaire à l'E.N.N.A. de Lille)

Faire apparaître naturellement par une expérimentation géométrique la notion de nombre dérivé d'une fonction et son lien avec la tangente à une courbe en un point (sans formalisme algébrique).

I. Introduction

Cette leçon s'adresse à des élèves de B.E.P. d'une part ayant besoin d'une motivation à toute activité d'abstraction mathématique et d'autre part appréciant de découvrir par eux-mêmes les phénomènes mathématiques.

Cependant, nous pensons que cette manière de procéder semble profitable à d'autres élèves.

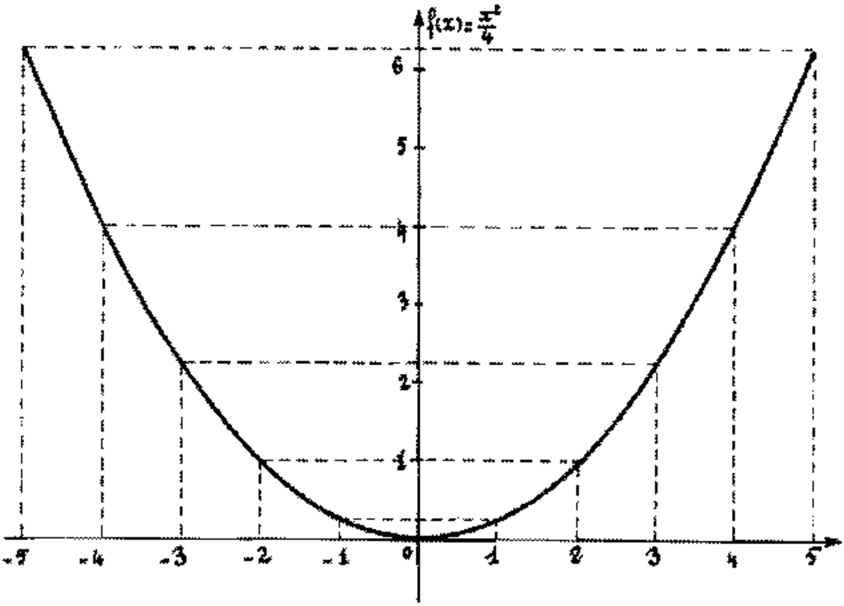
II. Etude de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{4}$ pour $x \in [-5, +5]$

1. Pour toutes valeurs de x, la fonction est définie.

2. Tableaux des valeurs

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

3. Représentation graphique (voir fig. 1).



III. Agrandissement de la courbe ($\mathcal{C}$) autour du point P(2,1)

1. On veut préciser l'étude de la fonction au voisinage du point 2, soit donc l'allure de la courbe au voisinage du point P(2,1).

2. Pour cela, on agrandit une partie de la courbe ($\mathcal{C}$), par exemple en multipliant par cinq les longueurs unités des axes, afin de bien localiser l'étude.

Le facteur cinq provient du choix de l'unité de longueur (ici : 2 cm) et de la volonté de ne pouvoir approcher les coordonnées des points qu'au centième près.

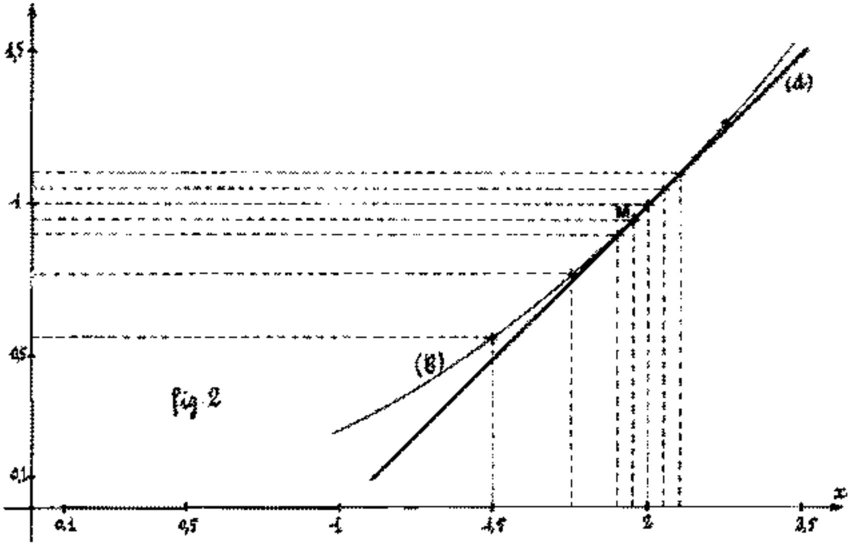
3. Entre autres possibilités, on peut aboutir au choix de l'intervalle [1,9 ; 2,1] et des tableaux de valeurs suivants :

x	1,9	1,95	2	2,05	2,1
$f(x)$	0,902500	0,950625	1	1,050625	1,102500

Pour faire la représentation graphique, on utilisera des valeurs approchées de $f(x)$:

x	1,9	1,95	2	2,05	2,1
f(x)	0,90	0,95	1	1,05	1,10

Représentation graphique (voir fig. 2).



On remarque que les cinq points sont alignés, on obtient donc une droite (d) qui est la représentation graphique d'une application affine.

Cette droite (d) a pour équation $y = a.x + b$ avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{y-1}{x-2} \\ &= \frac{1,1-1}{2,1-2} \\ &= 1 \text{ (puisqu'elle passe par P).} \end{aligned}$$

4. D'ailleurs, l'observation du deuxième tableau de valeurs montre que

$$y = x - 1 .$$

5. Plus on s'éloigne du point P, plus nettement la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite (d) sont distinctes (cf. représentation graphique).

IV. Autres agrandissements

1. Le professeur pose aux élèves le problème de réaliser d'autres agrandissements, et il les laisse libre d'expérimenter autant qu'ils le veulent.

2. Le professeur suit et exploite leurs choix, en sachant qu'on pourra éviter au moins trois écueils.

3. *Premier écueil* : que l'on ait ou non cinq points alignés dépend du choix des échelles sur les axes, donc des valeurs approchées f(x) choisies (cf. tableau du III.3). A la limite, en grossissant suffisamment, on obtient exactement les points de ($\mathcal{C}$), qui ne sont pas alignés.

4. *Deuxième écueil* : les élèves doivent déterminer la précision du tracé permise sur papier millimétré en fonction de l'unité de longueur. Par exemple, si en III.2, on agrandit dix fois l'unité de longueur, le papier millimétré permet d'approcher les coordonnées à 0,005 près et le tableau utilisé pour la représentation graphique n'est plus valable.

Plus précisément, on aboutit à la situation du troisième écueil.

5. *Troisième écueil* : éventuellement, il n'est pas aisé d'aboutir à une droite. *Exemple :*

x	1,95	1,975	2	2,025	2,05
f(x)	0,950625	0,97515625	1	1,02515625	1,050625
y	0,95?	0,975	1	1,025	1,05?

Néanmoins, on peut retrouver une droite par exemple :

x	1,96	1,98	2	2,02	2,04
f(x)	0,9604	0,9801	1	1,0201	1,0404
y	0,960	0,980	1	1,020	1,040

6. Un agrandissement plus puissant amène à resserrer le tableau des valeurs autour de 2 pour pouvoir placer les points correspondants sur le papier millimétré.

7. Quand on peut tracer une droite, comment expliquer que l'on retrouve alors la même droite (d) ?

V. Nombre dérivé et tangente

1. Le procédé de construction précédent, lorsqu'il aboutit, donne une droite passant par le point P(2,1).

Le surprenant de la construction est de retrouver à chaque fois la même direction (coefficient directeur).

Or, ce coefficient directeur a été déterminé par le quotient $\frac{y-1}{x-2}$.

2. Dans ce quotient, y est une approximation de $f(x)$, plus précisément :

$$f(x)-y = \frac{x^2}{4}-(x-1)$$
$$= \frac{x^2-4x+4}{4}$$
$$= \frac{(x-2)^2}{4}$$

donc $$y = f(x)-\frac{(x-2)^2}{4}$$

3. Le coefficient directeur "a" vérifie donc :

$$a = \frac{y-1}{x-2} = \frac{f(x)-\frac{(x-2)^2}{4}-1}{x-2}$$
$$= \frac{f(x)-1}{x-2}-\frac{x-2}{4}$$

4. Pour peu que $\frac{x-2}{4}$ ne soit pas discernable dans le repère de la représentation graphique ("x suffisamment proche de 2"), il est naturel d'obtenir le même coefficient directeur d'un agrandissement à l'autre. C'est à ce moment que l'on peut introduire la notation :

$$a = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-1}{x-2}$$

Bien sûr, on peut aussi parler de nombre dérivé, en donnant son interprétation graphique (coefficient directeur d'une droite bien précise).

5. Comment dénommer cette droite (d) bien précise ?

Il faudrait en trouver une propriété caractéristique, si possible géométrique. Elle possède au moins un point commun avec la courbe ($\mathscr{C}$) : le point P(2,1).

Quels sont donc les points communs à ($\mathscr{C}$) et à (d) ?

$$f(x)=y \iff f(x) = f(x)-\frac{(x-2)^2}{4}$$
$$\iff x=2 \qquad\qquad \text{(cf. V.2)}$$

Par conséquent, la droite (d) obtenue expérimentalement est la tangente à (   ) au point P.

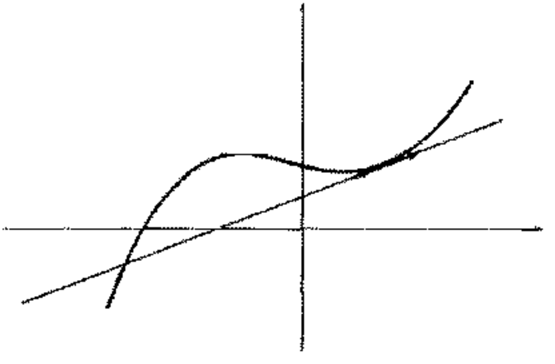
On obtient donc naturellement l'illustration géométrique habituelle du nombre de dérivé d'une fonction.

VI. Prolongements

1. Dans le cadre V.4, faire déterminer par les élèves un intervalle centré en 2 permettant d'aboutir à une droite.

2. Déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en x dont on ne connaît pas l'expression algébrique, mais pour laquelle on possède une représentation graphique (application aux sciences physiques).

3. Comment discuter le phénomène suivant :



a) La tangente peut recouper la courbe ailleurs.

b) Mise en évidence du caractère local de la tangente.

4. Définition de la fonction dérivée et son exploitation (cf. programme).

Par exemple, détermination par la représentation graphique de la fonction dérivée de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{4}$, ce qui permet de justifier le choix du vocable "dérivé".