sur la raréfaction des nombres premiers

E. Ehrhart, Strasbourg

Rectification typographique. Dans l'article paru sous le titre ci-dessus dans le *Bulletin* 357 :

page 16, au lieu de numérateur $\frac{5}{2} L^2 2n - L^2 n$, il faut lire

$\frac{5}{6} L^2 2n - \frac{3}{2} L^2 n$;

page 17, les parenthèses avaient été oubliées dans

$$\frac{n}{Ln}\left(1+\frac{1}{2\ Ln}\right) \quad \text{et} \quad \frac{2n}{Ln\ L2n}\left(L2-\frac{3L^2n-L^22n}{2\ Ln-L2n}\right).$$

Complément. J. Steinig, professeur à l'Université de Genève, me signale :

1) Au Congrès International des Mathématiciens, Moscou 1966, Rosser et Schoenfeld ont indiqué que

$$\Pi_{2n} < 2\Pi_n \qquad (n > 10)$$

"mais leur démonstration semble en effet n'avoir pas été publiée".

2) La vieille conjecture

$$(1) \qquad \Pi_{n+m} \leqslant \Pi_n + \Pi_m \qquad (n, m \geqslant 2)$$

a été vérifiée par Segal pour $n+m \leqslant 10^5$.

3) Elle est incompatible avec une conjecture de Hardy et Littlewood qui généralise celle de l'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux, mais elle est compatible avec cette existence elle-même (Amer. Mathematical Society, 1973).

Une conjecture. De (1), on déduit :

Les n premiers entiers contiennent plus de nombres premiers que toute autre tranche disjointe de n entiers consécutifs, pour $n > 10$ *;*

Après consultation des tables de nombres premiers de H. Riesel ("Prime numbers and Computer Methods for Factorisation", Birkbäuser, Bâle), cette conjecture me semble hautement probable. Voici trois raisons qui militent en faveur de cette généralisation du théorème établi dans l'article cité au début :

1) *Elle est vérifiée pour* $m \leqslant 10^5$, où m désigne le plus grand entier de la seconde tranche.

2) *Elle est démontrée au cas où les deux tranches sont adjacentes.* Il est même prouvé que Π_{2n} est nettement inférieur à $2\Pi_n$, si la sifférence entre n et $\frac{m}{2}$ est relativement petite.

3) Par suite de la raréfaction en gros des nombres premiers, l'exactitude de la conjecture est d'autant plus probable que les deux tranches de n entiers sont plus distantes. D'ailleurs *nous l'avons vérifiée pour* $n \leqslant 1000$ *et* $m = 10^a + 1000$, *où* $5 \leqslant a \leqslant 15$.