études

sur le problème de collatz

E. Ehrhart, Strasbourg

Pour Hilbert un problème est "beau", si l'on peut l'expliquer au premier passant de la rue, tout en étant très difficile à résoudre. Parmi les plus connus, citons :

— *Le problème des treize boules,* posé par Newton et résolu en 1952 en Allemagne.

— *Le problème des quatre couleurs,* posé en 1852 en Angleterre et résolu en 1976 aux Etats-Unis par ordinateur.

— *Le problème de Fermat,* toujours ouvert : on sait à présent que l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'a pas de solution entière non nulle pour n compris entre 2 et un nombre de l'ordre de 10^6 (Conférence de S. Lang du 15 mai 1982 au Palais de la Découverte). En 1983, Gerd Falting, jeune professeur à l'Université de Wuppertal, a démontré que l'équation ne pourrait avoir qu'un nombre fini de solutions entières, quel que soit l'entier $n > 2$. Les X, Y, Z étant premiers entre eux.

Depuis une trentaine d'années, un nouveau "beau" problème circule dans le monde mathématique. Plusieurs prix sont offerts pour sa résolution. C'est le *problème de Collatz,* ainsi nommé d'après le professeur de Hambourg qui l'a lancé.

Définition : Une suite de Collatz est définie par la récurrence

$$u_{n+1} = \begin{cases} 3u_n + 1, & \text{si } u_n \text{ est impair ;} \\ u_n/2, & \text{si } u_n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Elle dépend d'un paramètre : son premier terme u_1, entier positif.

Conjecture : *Pour toute suite de Collatz, il existe k tel que $u_k = 1$.*

Par ordinateur, le Japonais Ishihata l'a vérifiée pour $u_1 < 3.10^{12}$.
Voici deux exemples de suites de Collatz :

Pour $u_1 = 12$, $u_n = 12,6,3,10,5,16,8,4,2,1,\ldots$ ($k = 10$).
Pour $u_1 = 13$, $u_n = 13,40,20,10,5,16,8,4,2,1,\ldots$ ($k = 10$).

Pour $u_1 \leqslant 50$, k n'est relativement grand que pour $u_1 = 27$ ($k = 112$) et en conséquence pour $u_1 = 31,41,47$, car ces nombres figurent parmi les premiers termes de la suite $u_n = 27,82,\underline{41},124,62,\underline{31},94,\underline{47},\ldots$

Remarquons que k *peut être aussi grand que l'on veut*, car clairement $k = N+1$ pour $u_1 = 2^N$. Pour n de 1 à k tous les termes de la suite engendrée par ce u_1 sont pairs, à part $u_k = 1$.

La proposition suivante montre également que k peut être arbitrairement grand (à supposer qu'il existe).

Proposition. *Il existe une suite de Collatz globalement croissante jusqu'à* u_{2N} où l'entier N est arbitraire. (Ici $u_n \neq 1$ pour tout $n \leqslant 2N$).

Pour n de 1 à $2N$ les termes de cette suite sont alternativement impairs et pairs.

C'est la suite engendrée par $u_1 = 2^N i - 1$, où i est un entier impair arbitraire. Nous établirons la proposition pour $u_1 = 2^N - 1$ (où $N > 1$), la démonstration étant pareille pour i quelconque.

On voit en effet immédiatement que

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 2^N - 1 & u_2 = 3^1.2^N - 2 \\
u_3 = 3^1.2^{N-1} - 1 & u_4 = 3^2.2^{N-1} - 2 \\
u_5 = 3^2.2^{N-2} - 1 & u_6 = 3^3.2^{N-2} - 2 \\
\vdots & \vdots \\
u_{2N-1} = 3^{N-1}2^1 - 1 & u_{2N} = 3^N 2^1 - 2
\end{array}$$

En passant d'une ligne à la suivante un facteur 2 du produit est remplacé par un facteur 3. Les termes de rang impair forment donc une suite croissante, ainsi que les termes de rang pair.

Remarques.

1) Pour $u_1 = 1$ la suite de Collatz est $u_n = 1,4,2,1,4,2,\ldots$ Si la conjecture est exacte, *toute suite de Collatz est donc de période 3 à partir de* u_k et il y a une infinité de k convenables.

2) Considérons la suite définie par la récurrence

$$u_{n+1} = \begin{cases} 5u_n + 1, & \text{si } u_n \text{ est impair ;} \\ u_n/2, & \text{si } u_n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Pour $u_1 = 1$, $u_n = 1,6,3,16,8,4,2,1,\ldots$ est de période 7 : il y a une infinité de termes $u_k = 1$ dans la suite. Il en est de même pour $u_1 = 2^N$, car $u_{N+1} = 1$.

Pour $u_1 = 13$, $u_n = 13,66,33,166,83,416,208,104,52,26,13,\ldots$ est de période 10 : *il n'y a aucun terme* $u_k = 1$ dans la suite.

Bibliographie

[1] CRANDALL, R.E. : *On the "3n+1" Problem*, Mathematics of Computation 32 (1972).

[2] GARNER, L.E. : *On the Collatz 3n+1 algorithm*, Proceedings of the Amer. Math. Society 82 (1981).

[3] WAGON, S. : *The Collatz Problem*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, N° 1 (1985).

[4] LAGARIAS, J.C. : *The 3n+1 Problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly (janvier 1985).