les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite intiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante ;

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 134 (Jean-Pierre TISO, Besançon)

Démontrer que $A_1,A_2,\dots,A_n$ étant n sous-groupes d'un groupe G, $H=A_1A_2\dots A_n$ est un sous-groupe de G si et seulement si

$$A_1H = A_2H = \dots = A_nH .$$

ÉNONCÉ N° 135 (Robert CHARDARD, Les Ulis)

Quels sont les entiers n pour lesquels 2^n+1 est somme de deux carrés ?

ÉNONCÉ N° 136 (Dominique ROUX, Limoges)

Quel est l'isobarycentre des quatre centres des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 119 (Dominique ROUX, Limoges)

Prouver que la courbe paramétrée de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$x(t) = 1 + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$y(t) = \frac{t}{1!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$z(t) = \frac{t^2}{2!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^8}{8!} + \dots, \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbf{R},$$

est incluse dans une surface cubique (surface algébrique de degré 3).

SOLUTION (Gérard LAVAU, Mesnil Esnard)

Soit j le complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. On a alors :

$$x(t) + y(t) + z(t) = e^t$$

$$x(t) + jy(t) + j^2z(t) = e^{jt}$$

$$x(t) + j^2y(t) + jz(t) = e^{j^2t}$$

D'où :

$$(x(t) + y(t) + z(t))(x(t) + jy(t) + j^2z(t))(x(t) + j^2y(t) + jz(t)) = e^{t+jt+j^2t} = 1$$

En développant, on obtient :

$$x(t)^3 + y(t)^3 + z(t)^3 - 3x(t)y(t)z(t) = 1$$

La courbe paramétrée est donc incluse dans la surface cubique d'équation :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1.$$

Autres solutions, utilisant cette méthode : J. BOUTELOUP (Rouen), Robert CHARDARD (Les Ulis), D. FERREOL (Paris), Georges GLAESER (Strasbourg), Denis HUNEAU (Troyes), Jean LEMAIRE (Lille), Georges LION (Limoges), François LO JACOMO (Paris), Bernard LUCET (Nancy), René MANZONI (Le Havre), Claude MORIN (Limoges), Jean ONIMUS (Auxerre), Didier TROTOUX (Evreux).

Autres solutions, utilisant des méthodes de résolution du système différentiel : $x' = z$, $y' = x$, $z' = y$, avec conditions initiales : $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$: Marcel BOUTEILLER (Brive), Jean-Charles LECCIA (Annecy Le Vieux), Thierry LEGAY (Paris), Georges LION (Limoges), Pierre MANAC'H (Lorient), Jean NORDON (Paris), Charles NOTARI (Noë), Daniel PECKER (Paris).

Une solution fausse, d'un lecteur qui pense que la courbe proposée est incluse dans une quadrique de révolution.

Complément n° 1 :

Georges LION et Daniel PECKER observent une généralisation d'une particularité de ce système différentiel.

Soit un système différentiel linéaire, à coefficients constants, d'inconnues x, y, z et dont la matrice admet pour valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3. S'il existe des entiers relatifs p, q, r tels que $p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3 = 0$ alors toute courbe intégrale est incluse dans la surface algébrique d'équation :

$$\ell_1^p(x,y,z)\, \ell_2^q(x,y,z)\, \ell_3^r(x,y,z) = \text{constante},$$

où ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont des combinaisons linéaires telles que :

$$\ell_i\,(x',y',z') = \lambda_i\, \ell_i\,(x,y,z)\,, \quad (\text{pour } i = 1,2,3)\,,$$

et par suite où $\ell_i(x,y,z) = A_i\, e^{\lambda_i t}$.

Complément n° 2 :

J. BOUTELOUP, F. LO JACOMO et C. MORIN analysent, d'un point de vue géométrique, la configuration obtenue.

La surface S d'équation : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ est de révolution autour de l'axe $D(x = y = z)$. En effet, en effectuant le changement de repère orthonormal, défini par :

$$X = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2x - y - z)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y - z)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(x + y + z)$$

par lequel l'axe D devient l'axe OZ, l'équation de la surface S devient :

$$Z = \frac{2\sqrt{3}}{9(X^2 + Y^2)}$$

S a une forme d'entonnoir asymptote à l'axe de révolution D et au plan normal P d'équation : $x + y + z = 0$.

Un calcul simple permet de vérifier que la courbe proposée se projette orthogonalement sur le plan P selon la *spirale logarithmique* d'équation polaire :

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}\, e^{-\frac{\theta}{\sqrt{3}}}}\,, \quad (\text{où } \theta = \frac{t\sqrt{3}}{2})\,.$$

Complément n° 3 :

Il est surprenant de constater qu'aucune réponse n'évoque la question de savoir s'il existe d'autres surfaces cubiques que la surface S, répondant à l'énoncé 119. En fait, l'*unicité* de S peut se démontrer ainsi :

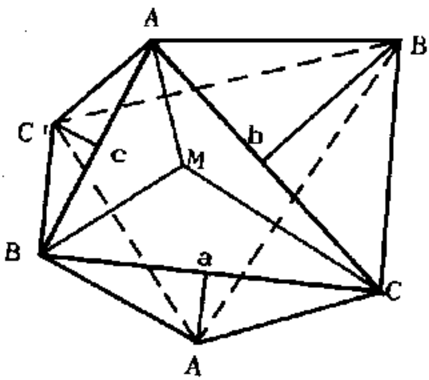
Supposons que deux surface cubiques distinctes S et S′ contiennent la courbe donnée. Pour tout plan Π (sauf éventuellement pour un nombre fini de plans) les intersections de Π avec S et S′ sont des cubiques planes C et C′. Un théorème de Bezout nous permet d'affirmer que le nombre des points réels communs à C et C′ est au maximum 9, si on choisit Π non parallèle à P, afin que C soit une courbe irréductible. Par suite, la courbe donnée dans l'énoncé 119 rencontrerait en particulier tout plan contenant l'axe D en au plus 9 points réels, alors que le complément n° 2 ci-dessus montre qu'une telle intersection est formée d'une infinité de points. Cette contradiction prouve que la courbe proposée est contenue dans une seule surface cubique, et par suite n'est pas contenue dans une quadrique (car la réunion d'une quadrique propre et d'un plan est une surface cubique).

ÉNONCÉ N° 120 (Jean BERRARD, Paris)

On donne un triangle ABC de centre de gravité G. Comment faut-il placer le point M dans le plan pour que les médiatrices de [MA], [MB], [MC] forment un triangle admettant aussi G comme centre de gravité ?

SOLUTION de Jean ONIMUS (Auxerre)

Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, a,b,c les milieux des segments [BC], [CA], [AB], et A′, B′, C′ les points de rencontre des médiatrices de [MA], [MB], [MC].



A′ est le centre du cercle circonscrit au triangle MBC, donc est sur la médiatrice Oa de [BC]. De même, B′ est sur Ob et C′ est sur Oc. G étant le centre de gravité de ABC (ou de abc) et G′ étant le centre de gravité de A′B′C′, on a la relation :

$$\overrightarrow{aA'}+\overrightarrow{bB'}+\overrightarrow{cC'}=3\overrightarrow{GG'}\ .$$

Donc ABC et A'B'C' ont même centre de gravité si et seulement si :
$\overrightarrow{aA'} + \overrightarrow{bB'} + \overrightarrow{cC'} = \overrightarrow{O}$.

S'il en est ainsi, on peut construire un triangle PQR avec :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{aA'}, \quad \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{bB'}, \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{cC'}.$$

Ce triangle a ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle ABC, donc lui est directement semblable. Une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ rend les côtés de PQR parallèles à ceux de ABC, d'où :

$$\frac{aA'}{BG} = \frac{bB'}{CA} = \frac{cC'}{AB} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{aA'}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{bB'}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{cC'}) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Les trois triangles isocèles BA'C, CB'A, AC'B sont directement semblables et :

$$(\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{B'A}) = (\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{C'B}) \pmod{2\pi}$$

or :

$$(\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}) = 2(MB,MC), \quad (\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{B'A}) = 2(MC,MA), \quad (\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{C'B}) = 2(MA,MB)$$

d'où : $(MB,MC) = (MC,MA) = (MA,MB) \pmod{\pi}$.

La somme de ces trois angles valant 0 (mod π), leur valeur commune est $+\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$, la valeur 0 étant éliminée puisque A,B,C ne sont pas alignés.

Dans le cas général, on obtient deux points M' et M" solutions, ce sont les points d'où l'on voit les trois côtés de ABC sous un même angle de droite.

On les obtient en construisant les centres A', B', C' des trois triangles équilatéraux extérieurs à ABC et de côtés BC, CA, AB ; puis les centres A", B", C" des trois triangles équilatéraux "intérieurs" de côtés BC, CA, AB. Le point M' est commun aux trois cercles, de centre A' passant par B et C, de centre B' passant par C et A, et de centre C' passant par A et B. De même, pour M" avec les centres A", B", C".

On reconnaît la configuration des deux triangles de Napoléon A'B'C' et A"B"C", qui sont équilatéraux et de même centre G ; ainsi que le point de Fermat (ou de Torricelli) M'.

Dans le cas particulier où ABC est équilatéral, il y a plus que deux solutions : M' est quelconque sur le cercle circonscrit à ABC et M" est en O.

Autres bonnes solutions : L'auteur, Jean BOUCHENOT (Ivry), Jean COSTESÈQUE (Toulouse), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë).

Solutions partielles : Suzanne CHRÉTIEN (Villemomble), François COULOIGNER (Forges-les-Eaux), François LO JACOMO (Paris).

Une réponse fausse.

ÉNONCÉ N° 121 (Françoise CRÉHANGE, Antony)

Pour quels réels a et b l'équation du cinquième degré :

$$x+8\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{(x+1)^2}+8\,\frac{1+a}{1-a}\,\frac{1}{(x-1)^2}+8\,\frac{a}{1+a}\,\frac{1}{x+1}+8\,\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x-1}=b$$

est-elle résoluble dans $\mathbb{C}$ par radicaux ? Etudier l'existence de racines multiples.

SOLUTION : L'auteur de cette solution souhaite garder l'anonymat.

L'équation s'écrit : $f(a,x)=b$ où :

$$f(a,x)=x+\frac{8(a+x)}{(1-a)(1-x)^2}+\frac{8(1+ax)}{(1+a)(1+x)^2}.$$

On suppose $a^2\neq 1$. Observons que : $f(-\frac{1}{a},-x)=-f(a,x)$. On peut donc supposer $a^2<1$.

Effectuons un changement de variable : $x=\dfrac{1-t}{1+t}$, $(\dfrac{2}{1+x}=1+t)$

et de paramètres : $a=\dfrac{m+1}{m-1}$, $b+1=-\dfrac{2p}{m}$,

l'équation s'écrit :

$$-\frac{p}{m}=\frac{4(a+x)}{(1-a)(1-x)^2}+\frac{4(1+ax)}{(1+a)(1+x)^2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=(1+t)(-\frac{t}{m}+1-\frac{1}{t}-\frac{m}{t^2})+\frac{1}{1+t}$$

L'équation prend la forme suivante :

(E) : $\quad t^5+t^4(2-m)+t^3(1-m-p)+t^2(m^2-p)+t(2m^2+m)+m^2=0$

D'autre part, construisons à partir de deux nombres complexes x_1 et x_2 trois autres nombres x_3, x_4, x_5 ainsi :

$$x_3=-\frac{1+x_1+x_2}{1+x_1},\quad x_4=\frac{-x_1x_2}{(1+x_1)(1+x_2)},\quad x_5=-\frac{1+x_1+x_2}{1+x_2}.$$

On observe que :

$$x_1x_2(1+x_4)=x_2x_3(1+x_5)=x_3x_4(1+x_1)=x_4x_5(1+x_2)=x_1x_5(1+x_3)$$

la valeur commune étant :

$$m=\frac{x_1x_2(1+x_1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

Calculons les *fonctions symétriques élémentaires* de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

- $x_1x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2\dfrac{m}{1+x_1}x_5 = -m^2$
- $1+x_1+x_2+x_3 = -x_1x_3$ et $1+x_1+x_4+x_5 = -x_1x_4$

  d'où $2+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = -x_1(1+x_3+x_4) = m$
- $1+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_5} = -\dfrac{1}{1+x_1+x_2} = \dfrac{x_4}{m}$ d'où $5+2\Sigma\dfrac{1}{x_i} = \dfrac{m-2}{m}$

  donc : $x_2x_3x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_3x_4 = 2m^2+m$
- $x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2 = 1-3m$, introduisons alors un second paramètre p, en posant :

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1 = 2m-p$$

  on a donc $\Sigma x_ix_j = 1-m-p$
- $x_1x_2x_4 = m-x_1x_2$

  d'où $x_1x_2x_4+x_2x_3x_5+x_1x_3x_4+x_2x_4x_5+x_1x_3x_5 = 3m+p$

  et $x_1x_2x_3 = -m(1+x_2)$, d'où :

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_1x_4x_5+x_1x_2x_5 = -m^2-3m\ .$$

En fin de compte x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont les racines de l'équation :

$$t^5+t^4(2-m)+t^3(1-m-p)+t^2(m^2-p)+t(m^2+m)+m^2=0$$

qui est l'équation (E) ci-dessus.

Observant que chacune des racines de l'équation (E) s'exprime rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, nous pouvons conclure, en utilisant un théorème de Galois, que *l'équation est toujours résoluble par radicaux* (et le groupe de Galois est métacyclique).

Mais la résoudre effectivement serait une autre affaire ! Référence : *Encyclopédie Universalis*, VII, p. 84.

Cas où il existe une racine multiple :

Les relations exprimant x_3, x_4, x_5 en fonction de x_1 et x_2 permettent de constater que :

$$x_1=x_2 \iff x_3=x_5$$
$$x_1=x_3 \iff x_4=x_5$$
$$x_1=x_4 \iff x_2=x_3$$
$$x_1=x_5 \iff x_2=x_4$$
$$x_2=x_5 \iff x_3=x_4$$

En conséquence, s'il existe une racine multiple, alors :

- ou bien cette racine est double et il existe une seconde racine double et une racine simple.

• ou bien l'équation admet une racine quintuple.

Dans le premier cas, l'équation (E) se factorise comme suit :

$$(t+\alpha^2)(t+\alpha+1)^2(t+\frac{\alpha}{\alpha-1})^2=0$$

Revenant à l'équation initiale $f(a,x)=b$ nous voyons que ses racines sont alors de la forme :

$$x=\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \text{ (simple)}, \quad x'=1-2\alpha \text{ (double)}, \quad x''=-1-\frac{2}{\alpha} \text{ (double)}.$$

La racine est quintuple pour $\alpha^2=\alpha+1$, donc pour $\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Autre solution : L'auteur.

Solution partielle : Charles NOTARI (Noé).

Compléments :

Appelant u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 les racines de l'équation $f(a,x)=b$, Madame CRÉHANGE obtient les dix relations suivantes entre ces nombres, qu'il est possible de déduire des relations ci-dessus entre x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, par le biais du changement de variable adopté :

$$\begin{aligned}
&u_5u_1u_2+u_1u_2-u_5u_2+u_5u_1-u_5-3u_1-u_2-5=0\\
&u_1u_2u_3+u_2u_3-u_1u_3+u_1u_2-u_1-3u_2-u_3-5=0\\
&u_2u_3u_4+u_3u_4-u_2u_4+u_2u_3-u_2-3u_3-u_4-5=0\\
&u_3u_4u_5+u_4u_5-u_3u_5+u_3u_4-u_3-3u_4-u_5-5=0\\
&u_4u_5u_1+u_5u_1-u_4u_1+u_4u_5-u_4-3u_5-u_1-5=0\\
&u_4u_1u_3-u_1u_3+u_3u_4-u_4u_1-u_3-3u_1-u_4+5=0\\
&u_5u_2u_4-u_2u_4+u_4u_5-u_5u_2-u_4-3u_2-u_5+5=0\\
&u_1u_3u_5-u_3u_5+u_5u_1-u_1u_3-u_5-3u_3-u_1+5=0\\
&u_2u_4u_1-u_4u_1+u_1u_2-u_2u_4-u_1-3u_4-u_2+5=0\\
&u_3u_5u_2-u_5u_2+u_2u_3-u_3u_5-u_2-3u_5-u_3+5=0
\end{aligned}$$

Ce sont à nouveau des relations qui permettent d'exprimer rationnellement toutes les racines en fonction de deux quelconques d'entre elles.

Madame Créhange signale aussi que la fonction $y=f(a,x)$ a, selon les valeurs de a, deux ou six extrema réels. Lorsqu'il y en a six ceux-ci peuvent être regroupés en trois paires, les ordonnées de deux extrema de chaque paire étant égales.

Autrement dit, la courbe représentative de cette fonction admet trois tangentes doubles parallèles à l'axe des abscisses. Voici deux exemples numériques obtenus par ordinateur :

1) pour $a=0$ la fonction a deux minima réels A et B,

$x(A)\approx 0{,}087378$	$y(A)\approx 7{,}692616$
$x(B)\approx 4{,}678574$	$y(B)\approx 7{,}692616$

2) pour $a=\dfrac{11}{13}$ la fonction a six extrema réels :

$x(A)=-3$	$y(A)=-\dfrac{35}{3}$
$x(B)\approx -3{,}457427$	$y(B)\approx -11{,}668585$
$x(C)=-2$	$y(C)=-\dfrac{35}{3}$
$x(D)\approx -1{,}744563$	$y(D)\approx -11{,}668585$
$x(E)\approx -0{,}542573$	$y(E)\approx 17{,}293585$
$x(F)\approx 9{,}744563$	$y(F)\approx 17{,}293585$

COURRIER DE LECTEURS

1) ***Solution tardive***

ÉNONCÉ N° 116 : Marc LAVENIR (Montceau-les-Mines).

2) Monsieur L. THIBERGE (Paris) nous fait parvenir une excellente lettre généralisant le résultat géométrique étudié dans le problème n° 117. La voici, in extenso, livrée aux lecteurs.

[*Note* : au sujet des foyers G' et G'' de l'ellipse (E) tangente aux côtés du triangle en leurs milieux, les lecteurs sont invités à consulter le livre de Yvonne et René SORTAIS (Le Mans) : *La géométrie du triangle* (Hermann, 1987), page 144].

"I. Le problème proposé par M. J. LEGRAND, de Biarritz, sous le n° 117 dans le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. n° 366 de septembre 1986 (p. 555) présente un grand intérêt.

C'est à juste titre que R. DELTHEIL et D. CAIRE l'ont publié dans leurs *Compléments de Géométrie* (Paris, Baillière 1951, p. 352), un ouvrage excellent aujourd'hui épuisé ; les auteurs y retiennnent une suggestion de A. HENNEQUIN, notre ami regretté, à savoir :

Les médianes du triangle ABC inconnu recoupant le cercle circonscrit (Ω) en P, Q, R donnés, d'affixes z_1, z_2, z_3, le centre de gravité G du triangle ABC est l'image de l'une ou l'autre des racines de l'équation du second degré

(1) $$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}=0\ ;$$

la construction de telles images est classique.

On peut ajouter : les points G′ et G″ obtenus, en général distincts, sont les foyers de l'ellipse (E) qui touche les côtés du triangle PQR en leurs milieux. (E) a pour centre le centre de gravité du triangle PQR.

II. La simplicité de ce résultat se laisse mieux apprécier si, plus généralement, on vient à remplacer dans l'énoncé le centre de gravité par le barycentre G des points A, B, C, affectés des coefficients α, β, γ donnés : $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$;

on suppose, pour avoir affaire à des triangles stricts seulement, que G n'appartient pas au cercle circonscrit (Ω) :

$$\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2+\alpha\beta AB^2\neq 0\ .$$

L'équation (1) devient :

(2) $$\frac{\alpha}{z-z_1}+\frac{\beta}{z-z_2}+\frac{\gamma}{z-z_3}=0\ ;$$

ses solutions, en général distinctes, sont les affixes de deux points G′ et G″.

a) Il existe une conique (Γ) ayant pour foyers G′ et G″ et touchant les côtés du triangle PQR .

b) Le barycentre O de P $(\beta+\gamma)$, Q$(\gamma+\alpha)$, R$(\alpha+\beta)$ est le centre de (Γ).

c) Le barycentre H de P $(\beta\gamma)$, Q$(\gamma\alpha)$, R$(\alpha\beta)$ est tel que (Γ) touche chacun des côtés QR, RP, PQ, respectivement en son point de rencontre avec PH, QH, RH .

d) Au sens de la Géométrie du Triangle, G′ et G″ sont deux points "inverses" par rapport au triangle PQR ; les triangles A′B′C′ et A″B″C″ associés à G′ et G″ sont tels que A′A″, B′B″, C′C″ ont respectivement même médiatrice que QR, RP, PQ.

On reconnaît deux cas particuliers :

- dans la section I, les points O et H coïncident avec le centre de gravité du triangle PQR ;
- dans le cas où l'équation (2) a une racine double, (Γ) est un cercle inscrit ou exinscrit au triangle PQR.

III. On peut convenir de donner un sens au cas $\alpha+\beta+\gamma=0$; G est alors le point à l'infini d'une direction (Δ) ; les triangles A(α), B(β), C(γ) et P(α), Q(β), R(γ) sont symétriques par rapport au diamètre (D) de (Ω) perpendiculaire à (Δ) ; le point O est, lui aussi, le point à l'infini de (Δ) ; le retour de PQR à ABC est unique.

Que sont devenus les points G' et G" de la section II ? L'équation (2) s'abaisse au premier degré ; on convient d'interpréter cet abaissement comme relatif au point à l'infini de (Δ), G' est en G.

G" est le foyer de la parabole (Π) qui remplace la conique à centre (Γ) de la section II, parabole dont la direction d'axe est (Δ) et qui touche les côtés du triangle PQR ; les points de contact restent ceux qui ont été définis au II.c).

Par malheur, le foyer G" est un point de (Ω) et doit donc être récusé."

3) Jean RUFFIN (Royat) communique des informations et précisions au sujet des commentaires à la solution de l'énoncé n° 112.

Le théorème de JACOBSON énoncé en haut de la page 216 du *Bulletin* n° 358, reste vrai même si l'anneau n'est pas unitaire. Référence : *An elementary proof of a theorem of Jacobson* par I.N. HERSTEIN, dans *Duke Mathematical Journal 21* (1954), pages 45 à 48. On notera au passage l'astucieux raisonnement suivant, qui permet de démontrer que tout élément nilpotent est nul.

Supposons que x soit nilpotent et non nul.
Soit k le plus petit entier positif tel que $x^k=0$.
Par hypothèse, il existe un entier n , $n>1$, tel que $x^n=x$.

Si $k=n$, alors $x=x^n=x^k=0$: contradiction.
Si $k<n$, alors $x=x^n=x^{n-k}.x^k=0$: contradiction.
si $k>n$, alors $0=x^k=x^{k-n}.x^n=x^{k-n}x=x^{k+1-n}$.
Mais $k+1-n>0$ et $k+1-n<k$: contradiction !

4) Pour le prochain Bulletin : intéressantes réponses à la question posée page 355 du *Bulletin* n° 359.

Errata :

Dans le *Bulletin* n° 359, certaines barres horizontales de radicaux ont été trop prolongées. Ceci s'est produit page 350 aux lignes 9 et 10, et page 351 aux lignes 1 et 6.