étude

une chèvre, deux échelles et un snubdodécaèdre

par Pierre Gagnaire
Collège Edouard-Herriot, Bron

Cet article aurait pu s'intituler : comment faire converger une suite divergente, ou encore : si on ne sait pas trouver *où* la suite *converge*, au moins cherchons *d'où* elle diverge.

De nombreux problèmes conduisent à une équation qui se met facilement sous la forme $x = f(x)$ où f est une fonction qui traduit l'énoncé du problème. Si cette fonction a de *bonnes propriétés* (qui font l'objet du cours traditionnel consacré à cette question), l'équation obtenue se prête à une *résolution par itération* facile à programmer. En effet, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est, pour une telle *bonne* fonction, convergente et sa limite n'est autre que la solution du problème.

Mais si la fonction n'a pas de *bonnes propriétés ?*

Et surtout si cette fonction n'est pas définie de manière à ce qu'on puisse observer si elle a, ou non, les *bonnes propriétés* requises, que faire ? Cette question se pose notamment lorsque la fonction f n'est définie que d'une façon *implicite*. C'est le cas pour chacun des trois problèmes qui suivent.

1. Les deux échelles

L'énoncé de ce problème est bien connu. Deux échelles AC et BD mesurant respectivement 2m et 3m sont placées dans un couloir aux murs verticaux et au sol horizontal. Le point E est à 1 m du sol. Quelle est la largeur du couloir ?

Solution :
Soit x la largeur du couloir,
$y = AF$ et $z = BF$; $x = y + z$.

ABC et AFE sont semblables donc
$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{d'où} \quad BC = \frac{x}{y}.$$
De même $AD = \dfrac{x}{z}$.

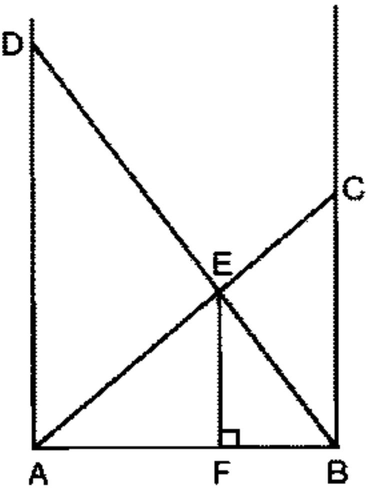


figure 1

Le théorème de Pythagore, appliqué aux triangles ABC et ABD donne alors
$$x^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4 \qquad \text{et} \qquad x^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 = 9$$
Cela permet d'exprimer y et z en fonction de x et, comme $x = y + z$, le problème conduit à la conjonction d'équations :

$$\boxed{(1)\ y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \ ; \ (2)\ z = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \ ; \ (3)\ x = y + z}$$

On est *naturellement* tenté de remplacer dans (3) y et z par leurs valeurs en fonction de x données par (1) et (2) puis d'éliminer les radicaux de cette équation. Cela mène à une équation du huitième degré, ce qui est fort désagréable.

C'est alors que l'on pense à calculer x par itération à partir des trois équations encadrées :

- on se donne une valeur initiale de x comprise entre 0 et 2,
- on calcule par (1) et (2) les valeurs correspondantes de y et z,
- (3) donne alors une nouvelle valeur de x sur laquelle on recommence la même suite de calculs.

Tout irait bien si le processus était convergent. Quelques essais suffiront pour nous convaincre qu'il n'en est hélas pas ainsi :

- pour la valeur initiale 1 de x, on obtient successivement
  0,93 0,85 0,76 0,68 0,59 etc.,

• pour la valeur initiale 1,5 de x, on obtient successivement 1,71 2,34 qui est plus grand que 2 et ne correspond donc à aucune réalité.

Ces essais ont au moins l'intérêt de nous montrer que la solution est comprise entre 1 et 1,5.

On peut alors recommencer en choisissant comme nouvelle valeur initiale la *moyenne* de 1 (qui est trop petit) et 1,5 (qui est trop grand). Cette moyenne est 1,25. On va calculer les valeurs correspondantes de y et de z puis (3) nous donnera une nouvelle valeur de x. Si celle-ci est plus grande que 1,25, c'est que 1,25 est trop grand. Sinon, 1,25 est trop petit. On a ainsi divisé par 2 l'intervalle dans lequel se trouve la solution du problème.

Le procédé que l'on vient de décrire est facile à programmer. Il constitue une réponse à la question posée du début :

Si on ne sait pas trouver *où* la suite converge, du moins cherchons *d'où* elle diverge.

En fait, on trouve, au bout de 31 itérations, avec 9 décimales exactes :

$$x = 1{,}231185723 .$$

(Reste à trouver un maçon capable de construire un couloir avec une telle précision si tant est qu'on ait pu préalablement construire deux échelles filiformes et rigides mesurant *exactement* 2m et 3m !).

Il est facile de trouver des défauts à la méthode que l'on vient de décrire :

• d'abord la convergence du procédé est *lente* : 31 itérations pour trouver 9 décimales, c'est trop ;
• ensuite, et surtout, elle dépend de ce que la fonction f est *croissante* dans un certain voisinage de la solution du problème ; pour des problèmes plus compliqués, où f est une fonction implicite, il n'est pas toujours possible de savoir à l'avance si f est croissante ou décroissante au voisinage de la solution.

Le paragraphe suivant a pour objet de perfectionner la méthode qui vient d'être indiquée.

2. Approfondissons un peu

Lorsque la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n)$ est convergente, sa limite est l'abscisse de l'un des points communs à la première bissectrice et à la courbe d'équation $y = \mathrm{f}(x)$. Pour qu'il en soit ainsi, on sait que le coefficient directeur de la tangente en ce point à la courbe doit être compris entre -1 et $+1$. Dans le cas contraire, la suite (u_n) diverge. Mais, si le problème posé admet une solution, le point commun à la première bissectrice et à la courbe n'en existe pas moins.

A l'instar de Maurice GLAYMANN (cf. *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. n° 308, p. 233 et suivantes), envisageons d'abord le cas où f est l'application $x \rightarrow ax+b$; mais a n'est pas nécessairement compris entre -1 et $+1$; dans ce cas, l'application f n'est pas nécessairement *contractante* et, par suite, (u_n) n'est pas nécessairement convergente.

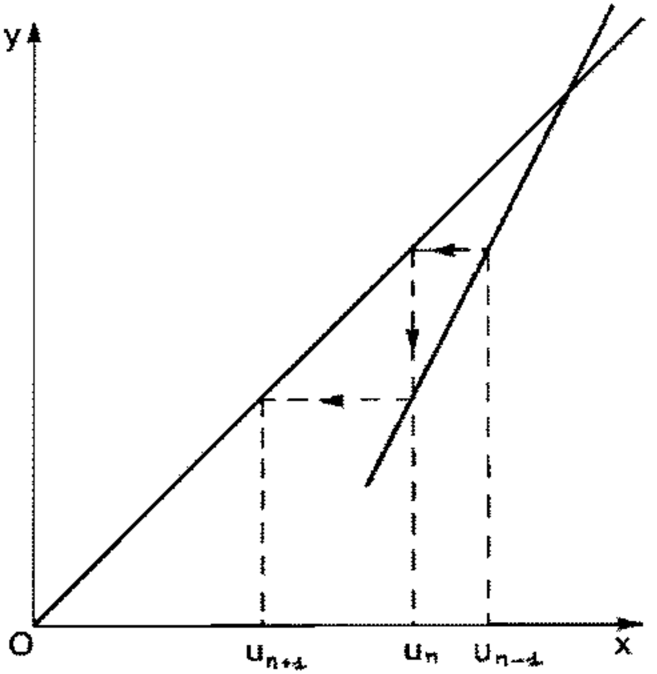
L'abscisse du point commun à la droite d'équation $y=ax+b$ et la première bissectrice est

$$\frac{b}{1-a}$$

D'autre part, $u_{n+1}=au_n+b$. On en déduit que l'abscisse de ce point commun est

$$u_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{a-1}$$

figure 2



Supposons maintenant que nous ne connaissions ni a ni b ; comment trouver l'abscisse du point commun ? Il suffit de calculer a de la façon suivante :

$$a = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n-1} - u_n} .$$

Envisageons ensuite le cas général où f est une application *quelconque*, c'est-à-dire pas nécessairement affine. On peut espérer que, dans un certain voisinage de la solution du problème, f *ne s'écarte pas trop* d'une certaine application affine $x \mapsto ax + b$. Cela suppose évidemment certaines *bonnes propriétés* de f, bien connues des spécialistes, mais nous laisserons ces bonnes propriétés hors du cadre de cet article, laissant à d'autres le soin de les préciser (approfondissons *un peu*).

Lorsqu'on s'attaque à un problème, on a toujours une idée sur l'ordre de grandeur de sa solution. Ainsi, dans le problème des deux échelles, on sait que la solution est comprise entre 0 et 2. Cela étant, soit u_0 une valeur approchée initiale de cette solution. On calcule facilement $u_1 = f(u_0)$ et $u_2 = f(u_1)$, ce qui donne $a = \dfrac{u_1 - u_2}{u_0 - u_1}$.

A partir de ce moment, on ne calculera plus la suite (u_n) par la formule $u_{n+1} = f(u_n)$ mais par celle-ci :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{u_n - f(u_n)}{a - 1}}$$

Ce nouveau calcul est facile à programmer. Il suffit d'ajouter au programme de calcul de $f(u_n)$ les instructions du calcul de $u_n - f(u_n)$, de division de ce nombre par $a - 1$ et d'addition à u_n de ce dernier résultat.

Par exemple, sur HP 35 (non programmable !), ce supplément de programme se résume à $- k \div +$ (si u_n *est dans le registre y*) où k désigne une valeur approchée de $a - 1$; dans la plupart des cas, cette valeur approchée peut être prise entière ; si k est proche de 0, on remplace le groupement $- k \div +$ par $- m \times +$ où m est une valeur approchée (entière) de l'inverse de $a - 1$; enfin, si k ou m est négatif, on peut les remplacer par leur valeur absolue à condition de changer le signe $+$ en signe $-$.

Si f est effectivement affine, la solution du problème est trouvée du premier coup. Dans le cas contraire, la procédure ici décrite améliore beaucoup la rapidité des calculs. Voyons ce qu'il en est, par exemple, du problème des deux échelles ; les calculs sont faits sur une HP 35 (non programmable). On choisit $u_0 = 1,25$. Le calcul de $f(x)$ se fait, une fois l'affichage de x réalisé, par la suite d'instructions que voici (↑ symbolise ENTER↑) :

↑↑↑ × 4 − CHS √ ÷ STO R↑↑ × 9 − CHS √ ÷ RCL +

On trouve alors $u_1 = 1,258990017$ $u_2 = 1,272503487$ d'où $a = 1,50316401$. L'inverse de $a - 1$ est très proche de 2 ; on complète donc le programme, conformément à ce qui précède, par $- 2 \times +$ puis on continue les calculs à partir de u_1 qui se trouve actuellement dans le registre y de la calculette.

On obtient ainsi successivement :

1,258990017
1,231963077
1,231245031
1,231190323
1,231186081
1,231185751
1,231185727
1,231185725
1,231185723
1,231185723

On observe que chaque étape donne une décimale de plus que la précédente : c'est nettement mieux que la méthode décrite en 1.

En fait, et ce n'est pas le moindre intérêt de la méthode, le procédé est *perfectible en cours de route.*

Par exemple, en prenant $u_0 = 1{,}2312$ (voisin du 4ᵉ terme de la liste précédente), on trouve $u_1 = 1{,}231206584$ et $u_2 = 1{,}231216205$ d'où un nouvelle valeur de a, soit $1{,}461269745$. Si, alors, on continue le calcul en changeant $-2\times+$ par $-.46\div+$, les termes suivants sont :

1,231206584 (déjà présent dans la machine)
1,231185669
1,231185723

Chaque étape donne maintenant *trois* décimales de plus que la précédente.

On voit, sur cet exemple, que le procédé converge d'autant plus vite que u_0 est proche de la solution du problème ce qui, d'ailleurs, paraît tout à fait normal, même à première vue. Inversement, si u_0 est choisi *trop loin* de la solution du problème, l'application affine $x \to ax+b$ par laquelle on remplace f n'approche pas suffisamment celle-ci pour assurer une convergence rapide.

Par exemple, dans notre problème des deux échelles, prenons $u_0 = 1$ d'où, comme on l'a vu, $u_1 = 0{,}9309036596$ et $u_2 = 0{,}8523043171$. Cela donne $a = 1{,}13753264$ *qui est assez voisin de* 1. Prenons alors 0,14 comme valeur approchée de $a-1$ et continuons les calculs à partir de u_1 en terminant le programme par $-.14\div+$. Le terme suivant est alors 1,492327535 qui est supérieur à la solution du problème, alors que 1 est inférieur à cette solution. Tout cela s'interprète facilement sur la courbe représentative de f. La méthode qui vient d'être décrite consiste en effet à remplacer cette courbe par sa corde qui passe par les points d'abscisses respectives u_0 et u_1 : si le coefficient directeur de cette corde est proche de 1, le point commun à la corde et la première bissectrice peut être très éloigné du point commun à la courbe et la première bissectrice. Il peut même se faire que l'abscisse de ce point commun tombe hors de l'ensemble de définition de f ; c'est le cas si on choisit $u_0 = 0{,}9$; a est alors voisin de 1,06 et le terme suivant est supérieur à 2,2.

Il est donc prudent, si on veut programmer vraiment (c'est-à-dire sur un ordinateur qui exclut toute intervention manuelle une fois le programme lancé) la machine ici décrite, d'inclure un test de comparaison de a avec 1, test qui peut, par exemple, provoquer l'arrêt des calculs et l'affichage de "valeur initiale mal choisie" si $|a-1|$ est inférieure à un certain seuil.

Un autre ennui se produit si $u_0 = 0{,}5$. Alors a est plus petit que 1 et la "suite perfectionnée" converge vers 0 qui est l'autre solution du problème, mais pas celle que l'on souhaite trouver. Il n'y a aucun moyen de se prémunir contre ce dernier ennui.

3. La chèvre

En un point A du bord d'un champ circulaire, on place un pieu, à ce pieu on attache une corde et au bout de celle-ci on attache une chèvre. Quelle doit être la longueur de la corde pour que la chèvre ne broute que la moitié du champ ?

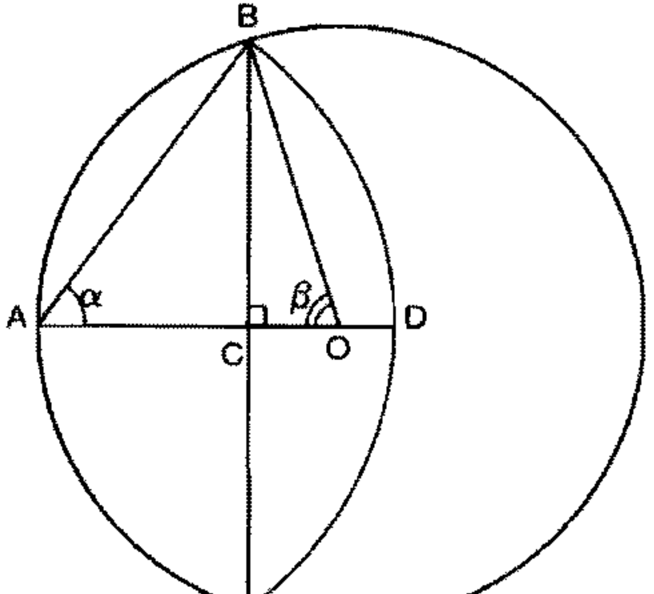


figure 3

Solution

Soit O le centre du champ et désignons par ℓ la longueur de la corde, en prenant pour unité le rayon du champ. La partie du champ que peut brouter la chèvre a la forme d'un "fuseau" ABDE ; son aire s'obtient en ajoutant celles de deux secteurs de disque, l'un de centre O, de rayon 1, limité par OB et OE, l'autre de centre A, de rayon ℓ, limité par AB et AE et en retranchant de cette somme le double de l'aire du triangle AOB.

Cette aire est $\frac{\pi}{2}$ si ℓ est convenable.

Mesurons les angles α et β en radians. L'aire du premier secteur est β, celle du deuxième est $\ell^2\alpha$ et le double de l'aire du triangle AOB est $\sin\beta$. De plus, puisque OA et OB ont même longueur, $2\alpha+\beta=\pi$. Enfin, en calculant BC dans les triangles ABC et OBC rectangles en C, on voit que $\sin\beta=\ell\sin\alpha$.

Le problème se traduit donc par la conjonction d'équations :

$$\boxed{(1)\ 2\alpha+\beta=\pi \quad ; \quad (2)\ \sin\beta=\ell\sin\alpha \quad ; \quad (3)\ \beta+\ell^2\alpha-\sin\beta=\frac{\pi}{2}}$$

L'élimination de α et β entre ces trois équations n'est pas à la portée de l'amateur de mathématique amusante qui se trouve donc collé !

Appliquons la méthode forgée du paragraphe précédent. Prenons 1 radian comme valeur initiale de β. L'équation (1) nous fournit la valeur correspondante de α :

$$\alpha_0=\frac{\pi-\beta_0}{2}$$

L'équation (2) nous donne alors une valeur initiale de ℓ :

$$\ell_0=\frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_0}$$

Enfin, l'équation (3) nous donne une nouvelle valeur de β :

$$\beta_1=\frac{\pi}{2}+\sin\beta_0-\ell_0^2\alpha_0$$

On a donc trouvé β_1 *en fonction de* β_0 sans avoir déterminé *explicitement* la fonction f telle que

$$\beta_1=f(\beta_0)\ .$$

Sans nous poser la question de savoir si la suite (β_n) telle que $\beta_{n+1}=f(\beta_n)$ est ou non convergente, calculons

$$\beta_2=f(\beta_1)\quad\text{puis}\quad a=\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_0-\beta_1}\ .$$

Nous poursuivons alors, comme au paragraphe 2, les calculs à l'aide de la formule

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{\beta_n - f(\beta_n)}{a-1}$$

Allons-u ! Le calcul (sur HP 35 qui ignore le radian !) se mène à bien par la suite d'instructions que voici :

$$1\uparrow 1\uparrow \pi - \text{CHS}\ 2 \div \underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{\text{STO}}}\ \text{R}\downarrow \pi \div 180 \times \sin \text{RCL}\ \pi \div 180 \times \sin \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{\div}} 1 \times \text{RCL} \times \text{STO}\ \text{R}\downarrow \pi \div 180 \times \sin \pi 2 \div + \text{RCL} \underset{\beta}{\underset{\downarrow}{-}}$$

On trouve alors $\beta_1 = 1{,}427782108$; $\beta_2 = 1{,}091041291$ d'où $a = -0{,}7871783572$. Nous ferons donc suivre les instructions ci-dessus par $-1.8 \div -$. Continuons les calculs à partir de β_1. On obtient ainsi, en six itérations :

β	ℓ
1,427782108	1,309559312
1,240703876	1,162643118
1,235899468	1,158730546
1,235896925	1,158728474
1,235896924	1,158728472
1,235896925	1,158728474

La dernière ligne reproduit l'antépénultième ; la précision de la machine HP 35 ne permet pas de trouver ainsi la neuvième décimale de ℓ. Toutefois, si on *triche* un peu, en remplaçant *à la main* cette neuvième décimale par 3 (moyenne de 2 et 4) lors de l'affichage de ℓ alors β conserve la dernière valeur trouvée.

Nous adopterons donc, pour mesure de la corde avec le rayon du champ pour unité : 1,158728473 sans oublier de la diminuer de la mesure, avec la même unité, de la distance qui sépare le point de fixation de la dite corde sur le collier de la chèvre de l'extrémité de ses lèvres lorsqu'elle tend le cou à l'extrême ! (précision oblige !).

4. Le snubdodécaèdre

Les deux problèmes précédents sont seulement des amusettes. Voici plus sérieux.

Le snubdodécaèdre est un polyèdre archimédien dont les faces sont 12 pentagones réguliers et 80 triangles équilatéraux ; autour de chaque sommet on trouve un pentagone et quatre triangles.

Le snubdodécaèdre peut être inscrit dans un dodécaèdre régulier ; chaque face de celui-ci contient alors une face pentagonale de celui-là et ces deux faces ont le même centre mais les côtés de la petite ne sont pas parallèles à ceux de la grande.

Le problème se pose de calculer le rapport de l'arête du snubdodécaèdre à celle du dodécaèdre circonscrit.

Dans le dodécaèdre régulier, on peut inscrire un cube dont les arêtes sont certaines diagonales des faces du dodécaèdre.

Rapportons l'espace au repère orthonormé (O,I,J,K) où OI, OJ, OK sont trois arêtes de ce cube.

Le dessin ci-après représente en traits forts quatre faces du snubdodécaèdre : deux triangles et deux pentagones, ceux-ci étant situés dans deux faces du dodécaèdre régulier.

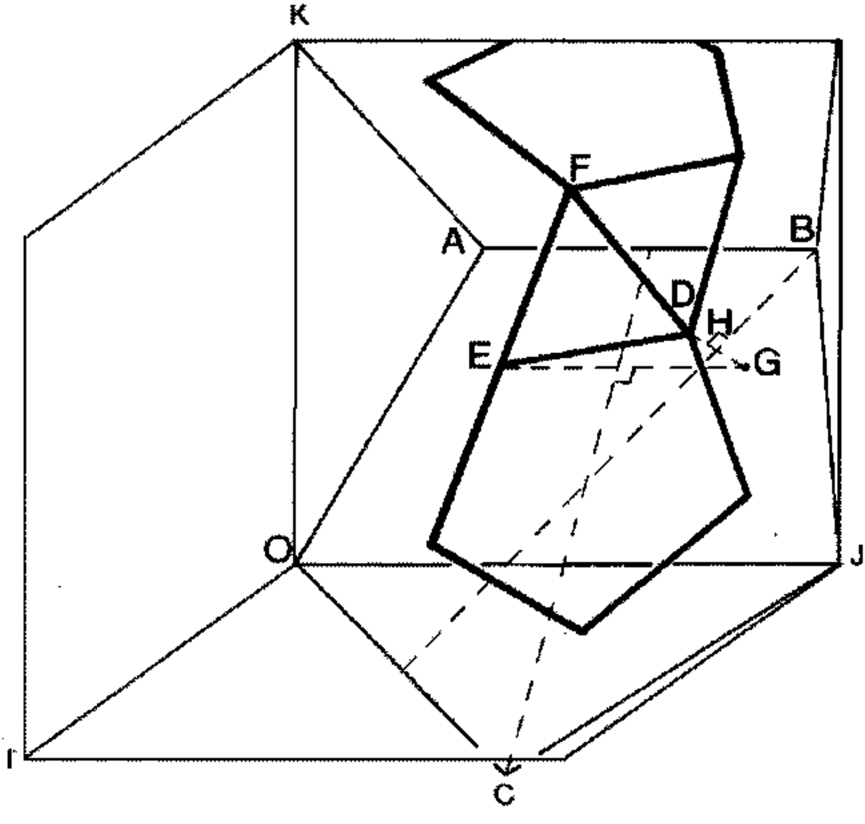


figure 4

Le pentagone OABJC est conservé par la symétrie orthogonale autour de la médiatrice de AB, mais non la face du snubdodécaèdre de côté DE. Elle est transformée en un autre pentagone dont un sommet G est l'image de E. G est aussi l'image de D par la symétrie orthogonale autour de la médiatrice de OC qui transforme cet autre pentagone en la face du snub-dodécaèdre de côté DE. M est le milieu de O et C, H celui de D et G, F est le symétrique de D autour de la droite qui joint le centre du dodécaèdre au milieu de A et B. Tout cela permet d'écrire les coordonnées suivantes :

$$A\begin{vmatrix} a \\ b \\ \frac{1}{2}\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} a \\ 1-b \\ \frac{1}{2}\end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} b \\ \frac{1}{2} \\ a\end{vmatrix} \quad D\begin{vmatrix} c \\ d \\ e\end{vmatrix} \quad E\begin{vmatrix} f \\ g \\ h\end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix} c \\ 1-d \\ 1-e\end{vmatrix}$$

$$G\begin{vmatrix} f \\ 1-g \\ h\end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2}\end{vmatrix} \quad H\begin{vmatrix} \frac{c+f}{2} \\ \frac{1+d-g}{2} \\ \frac{e+h}{2}\end{vmatrix}$$

Il est facile de calculer a et b. On trouve

$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Le calcul de l'arête du dodécaèdre se fait simultanément ; on trouve $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Le problème consiste alors à calculer les coordonnées de E, celles de F et la longueur ℓ de l'arête DE. Nous avons donc *sept* inconnues pour lesquelles il nous faut *sept* équations que les conditions suivantes vont nous donner.

1°) O,A,B,D sont dans un même plan, donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}) = 0$
d'où (1) $c = 2ae$

2°) O,A,B,E sont dans un même plan, donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}) = 0$
d'où (2) $f = 2ah$

3°) DG est perpendiculaire à BM, donc $\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{BM} = 0$
d'où (3) $2(b-2a)(f-c) + (4b-3)(1-d-g) + 2(a-1)(h-e) = 0$

4°) BH est perpendiculaire à OC, donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{OC} = 0$
d'où (4) $2b(c+f-2a) + 2b - 1 + d - g + 2a(e+h-1) = 0$

5°) $\ell = \text{DE}$
d'où (5) $\ell^2 = (f-c)^2 + (g-d)^2 + (h-e)^2$

6°) $\ell = \text{EF}$
d'où (6) $\ell^2 = (f-c)^2 + (1-d-g)^2 + (1-e-h)^2$

7°) $\ell = \text{FD}$
d'où (7) $\ell^2 = (1-2d)^2 + (1-2e)^2$

Les inconnues c et f s'éliminent grâce à (1) et (2) et il ne reste que *cinq* équations dans lesquelles d, e, g, h n'interviennent que par $e-h=m$, $1-d-g=p$, $1-e-h=s$, $d-g=u$, $1-2e=s-m$, $1-2d=p-u$. Ce changement d'inconnues permet de donner aux équations la forme suivante :

$$(3) \quad 2(1-a)(1+2b)m=(3-4b)p$$
$$(4) \quad u=1-2b+2a(1+2b)s$$
$$(5) \quad \ell^2=(4a^2+1)m^2+u^2$$
$$(6) \quad \ell^2=4a^2m^2+p^2+s^2$$
$$(7) \quad \ell^2=(p-u)^2+(s-m)^2$$

Les équations (3) et (4) sont du premier degré ; cela permet d'éliminer les inconnues p et u. On peut aussi éliminer ℓ^2 entre (5) et (6).
En tenant compte de ce que $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, le problème se ramène à résoudre la conjonction d'équations que voici :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (8) & m^2=3(4\sqrt{5}-9)s^2-(7\sqrt{5}-15)s+\sqrt{5}-2 \\ (9) & \ell^2=\left(\dfrac{(\sqrt{5}+1)m+(3\sqrt{5}-5)s-\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+(s-m)^2 \\ (10) & s^2=\ell^2-3m^2 \end{array}}$$

Il est illusoire de tenter d'éliminer deux des trois inconnues ℓ, m, s pour obtenir une équation à une seule inconnue.

En revanche, cette conjonction d'équations se prête tout à fait à la méthode forgée au paragraphe 2.

Remarquons d'abord que ℓ, m, s sont des réels *positifs*. Choisissons une valeur initiale s_0 pour s ; (8) donne alors m_0. Portant s_0 et m_0 dans (9), on calcule ℓ_0.

L'équation (10) fournit alors une nouvelle valeur s_1 de s. On a donc trouvé s_1 *en fonction de* s_0 sans avoir déterminé *explicitement* la fonction φ telle que

$$s_1 = \varphi(s_0)\,.$$

Sans nous inquiéter de la convergence de la suite (s_n) telle que $s_{n+1}=\varphi(s_n)$ (en fait, elle diverge !), calculons $s_2=\varphi(s_1)$ puis $\alpha=\dfrac{s_1-s_2}{s_0-s_1}$. Nous poursuivons alors le calcul par la formule

$$s_{n+1} = s_n+\frac{s_n-\varphi(s_n)}{\alpha-1}$$

comme au paragraphe 2.

Le calcul, sur HP 35, s'effectue par la suite d'instructions que voici :

↑↓↑ 5√ 4×9−3× ×5 √ 7 ×	5√ 3×5− ×5√ 1+RCL× +5	RCL ↑ ×
−15+ ×5√ +2−√ STOR↓↑	√ −1+2÷↑× RCL−↑×+	3 × − √
↓	↓	↓
m	ℓ^2	s

L'intervalle de définition de la fonction φ est très étroit. En effet, m^2 est, d'après (8), un trinôme en s de premier coefficient négatif (car $4\sqrt{5}<9$ puisque $80<81$), positif pour $s=0$ et qui s'annule pour $s=\frac{1}{3}$. Ce trinôme n'est donc strictement positif que pour $s<\frac{1}{3}$. D'autre part, pour toutes les valeurs de s_0 inférieures à 0,31, le carré de s_1 est strictement négatif. Pour $s_0=0{,}32$, on trouve $s_1\approx 0{,}22$ si bien que s_2 n'est pas défini ; pour $s_0=0{,}325$, on trouve $s_1\approx 0{,}29$ et s_2 n'est encore pas défini. Le calcul de α ne peut être entrepris que pour $s_0=0{,}3275$ (moyenne de 0,325 et 0,33, voisin de $\frac{1}{3}$). On trouve alors $s_1=0{,}3282219453$, $s_2=0{,}33901938$ d'où

$$\alpha=14{,}9560288.$$

Nous ferons donc suivre les instructions ci-dessus par $-\ 14 : +$. Poursuivons les calculs à partir de $s=0{,}33$. On obtient :

s	ℓ^2
0,33	0,1429526633
0,3272959148	0,1195959297
0,3274431367	0,1206640005
0,3274471440	0,1206933211
0,3274472402	0,1206940411
0,3274472402	0,1206940411

Cinq itérations suffisent pour que la dernière ligne reproduise la précédente. Cela donne pour ℓ la valeur 0,3474104793 donc, pour le rapport de l'arrête du snubdodécaèdre à celle du dodécaèdre circonscrit : 0,5621219638.

Remarque. Une exploration plus fine montre que la limite de la précision de la machine entre en jeu de façon assez curieuse, comme le montre le tableau suivant (les sept premières décimales sont les mêmes dans toutes les lignes pour chacune des trois colonnes).

s	ℓ^2	$\varphi(s)$
0,3274472397	0,1206940317	0,3274472212
398	318	214
399	316	211
400	410	400
401	411	402
402	411	402
403	412	403
404	412	403
405	413	405
406	411	402
407	412	403
408	412	403
409	413	405
410	413	405
411	414	406
412	412	403
413	412	403
414	413	405
415	508	596
416	508	596
417	509	597

Les trois dernières décimales de ℓ^2 et de $\varphi(s)$ ne varient pas d'une manière régulière. On observe une espèce de palier entre deux sauts brusques qui ont lieu pour $s=0{,}3274472400$ et pour $s=0{,}3274472415$. Ce palier est précédé et suivi par deux autres, plus courts. Il en résulte que les deux dernière décimales de la solution de $s=\varphi(s)$ ne peuvent être garanties. Mais ce défaut est imputable à la machine et non à la méthode ici exposée.

Pour terminer, résumons cette méthode.

Pour résoudre l'équation $x=\mathrm{f}(x)$:

- on calcule $x_1=\mathrm{f}(x_0)$, $x_2=\mathrm{f}(x_1)$ et $a=\dfrac{x_1-x_2}{x_0-x_1}$, x_0 étant un réel *convenablement* choisi ;
- on calcule un par un les termes de la suite (x_n) telle que
$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n-\mathrm{f}(x_n)}{a-1}$$
x_0 n'étant pas nécessairement le même que précédemment (il est souvent avantageux pour le calcul de choisir pour nouvel x_0 l'ancien x_1) ;
- si la convergence de cette nouvelle suite n'est pas jugée assez rapide, il est toujours possible de calculer une nouvelle valeur de a, comme ci-dessus, mais à partir d'un terme de rang assez élevé.