dans nos classes

les fonctions homographiques et les programmes de première de juin 1985

utilisation des symétries pour l'étude des branches infinies

par J.-M. Arzac
Lycée Jean Dupuy, Tarbes

Les programmes de première prévoient l'étude des branches infinies des courbes représentatives des fonctions étudiées et dans les exemples proposés figurent des fonctions homographiques ou telles que $x \to x + \frac{1}{x}$ c'est-à-dire des hyperboles. Nous avons quatre branches infinies. Pour chaque fonction il y a quatre études à faire et s'il est supportable de traiter intégralement un exemple, ou de le faire avec les élèves, il est plus que fastidieux, pour les élèves, de recommencer l'opération.

En utilisant les symétries de ces courbes, on ramène le travail à un niveau raisonnable. Mais au départ on ne sait rien de ces courbes et si le tableau de variation peut nous faire soupçonner une symétrie centrale, on ne sait rien des coordonnées du centre de symétrie.

Pour amener cette symétrie centrale on peut procéder de la manière suivante :

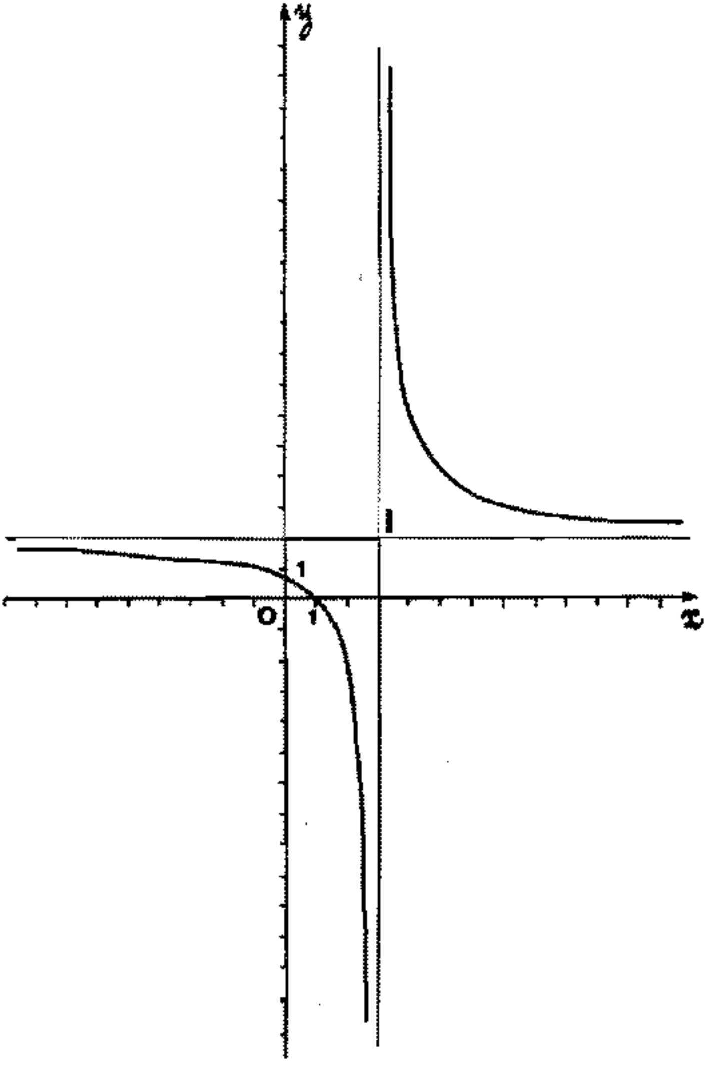
(1) On commence par une étude succincte.

Par exemple, celle de la fonction $f : x \to 2 + \frac{4}{x-3}$ qu'on donne à étudier.
On a : détermination de l'ensemble de définition, calcul de la dérivée, tableau de variation ; toutes choses qu'une bonne partie des élèves fait aisément.

On fait faire un tracé soigné, en particulier près de $x=3$.
$f(2,5)=-6$ $f(2,75)=-14$ $f(3,25)=18$ $f(3,5)=10$.

On obtient une courbe qui conduit à penser qu'il faudrait s'intéresser plus sérieusement à ce "voisinage" de 3. Bien entendu on calculera jusqu'à $f(10)\simeq 2,57$ et $f(-8)\simeq 1,63$.

figure 1



La forme de la courbe induit à rechercher une symétrie. Le dessin et l'expression $2+\frac{4}{x-3}$ nous suggèrent d'essayer le point I(3,2). Par un changement d'origine on établit la symétrie.

Pour terminer on remarque que $f(x)$ peut s'écrire plus simplement

$$\frac{2x-2}{x-3}$$

(2) La fonction précédente est du type $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

On se pose le problème de savoir si on peut trouver α et β tels que

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

On confie le travail aux élèves. Ils arrivent à :

$$\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{bc-ad}{c}$$

Donc $f(x)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ ou $f(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$

L'analogie avec la fonction précédente nous conduit à rechercher si sur le graphique le point $I(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$ est centre de symétrie. On le vérifie. On ne demande plus alors aux élèves que de retenir le résultat suivant :

Pour toutes les fonctions f telle que $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ il existe deux réels α et β tels que $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{cx+d}$. Le point $I(-\frac{d}{c},\alpha)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative.

(3) On prend une autre fonction : $f : x \to \frac{x-1}{x+1}$

a) On a le tableau :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f		‖	

b) On sait que $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels. On détermine α et β. On trouve $f(x)=1-\frac{2}{x+1}$. On sait que la courbe représentative est symétrique par rapport au point I(− 1;1). On limite donc l'étude des branches infinies à l'intervalle $]-1;+\infty[$.

c) Etude pour les grandes valeurs de x. Le tableau :

x	10	100	1000
$\frac{2}{x+1}$	$\approx 0{,}18$	$\approx 0{,}019$	$\approx 0{,}002$

suggère que f(x) se rapproche de 1 lorsque x devient très grand mais la courbe représentative peut avoir l'un ou l'autre des deux aspects :

figure 2

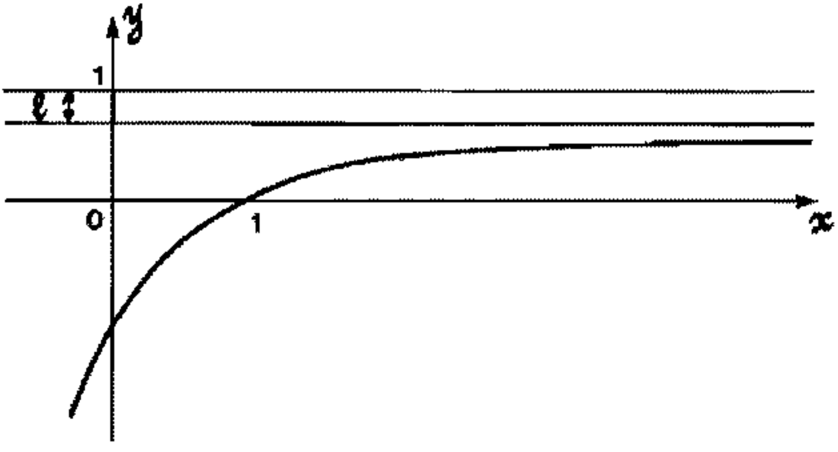
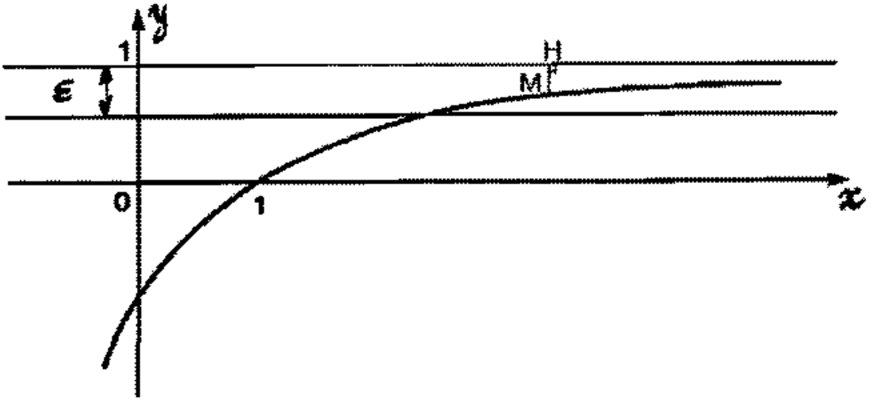


figure 3



Dans les deux cas la courbe "monte" de la gauche vers la droite. Sur la figure 2 on voit que la courbe est entièrement située en dessous de la droite d'équation $y = 1 - \ell$ (ℓ réel positif). Sur la figure 3, quel que soit le réel positif ε, toute droite d'équation $y = 1 - \varepsilon$ est coupée par la courbe et par conséquent il existe des valeurs de x telles que $f(x) > 1 - \varepsilon$.
Or $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$. Il existe donc des valeurs de x telles que $\frac{2}{x+1} < \varepsilon$.

Il est intéressant de déterminer dans quel cas nous nous trouvons ici.

Cherchons, par exemple, s'il existe des valeurs de x $(x > -1)$ telles que : $\frac{2}{x+1} < 10^{-5}$.

Ces valeurs de x seront telles que $\frac{x+1}{2} > 10^5$ ou $x > 2.10^5 - 1$.
On voit que dès que $x > 2.10^5 - 1$ on a $\frac{2}{x+1} < 10^{-5}$.
De même si $x > 2.10^{10} - 1$ alors $\frac{2}{x+1} < 10^{-10}$ et on aurait un résultat analogue avec 10^{-n} *où* n est un entier positif. On est dans le cas de la figure 3.

Soit le point $M(x, f(x))$ et H sa projection sur la droite Δ d'équation $y = 1$. On a $HM = -\frac{2}{x+1}$. On peut rendre M aussi voisin de H que l'on veut, à condition de prendre x assez grand. Δ est asymptote à la courbe représentative.

On en déduit facilement par symétrie qu'on a la même chose pour x négatif et $|x|$ grand et que là aussi Δ est asymptote.

d) Etude pour les valeurs de x proches de $-1 (x > -1)$. Le tableau :

x	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$
$-\frac{2}{x+1}$	-20	-200	-2000

suggère que lorsque x devient très proche de -1 ; $-\frac{2}{x+1}$ c'est-à-dire à peu de chose près $f(x)$ devient négatif et très grand en valeur absolue. Mais on peut avoir ces deux situations :

figure 4

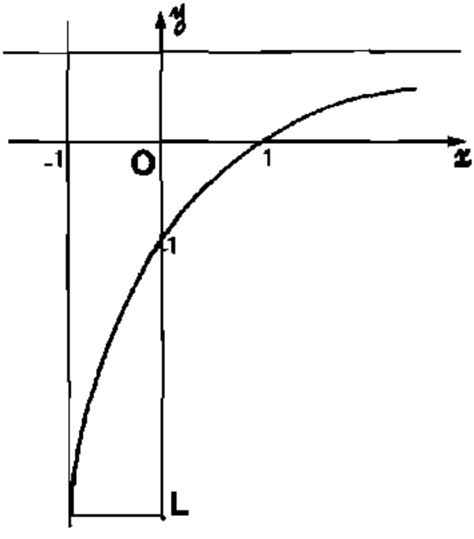
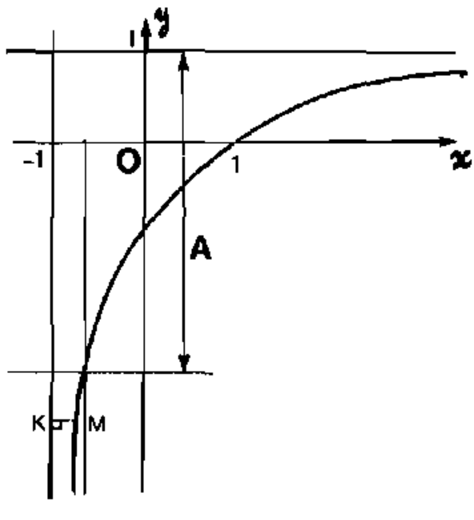


figure 5



Sur la figure 4 la courbe se rapproche du point $(-1;L)$ qu'elle n'atteint pas. Sur la figure 5, quel que soit le réel positif A il existe des valeurs de x telles que la courbe coupe la droite $y=1-A$.

Dans quel cas sommes-nous ici ?

Cherchons, par exemple, s'il existe des valeurs de x telles que

$$-\frac{2}{x+1}<-10^5 .$$

Ces valeurs de x sont telles $\frac{2}{x+1}>10^5$ c'est-à-dire

$$\frac{x+1}{2}<\frac{1}{10^5} \qquad \text{ou} \qquad x<2.10^{-5}-1 .$$

Donc dès que $-1<x<-1+2.10^{-5}$ on a $-\frac{2}{x+1}<-10^5$

De même si $-1<x<-1+2.10^{-10}$ alors $-\frac{2}{x+1}<-10^{10}$

On aurait un résultat analogue avec -10^n où n est un entier strictement positif.

On est dans le cas de la figure 5.

Soit le point $M(x, f(x))$ et K sa projection sur la droite Δ' d'équation $x=-1$. L'ordonnée de M peut être rendue aussi grande en valeur absolue que l'on veut, à condition de prendre une valeur de x assez proche de -1.

La droite Δ' est asymptote à la courbe représentative. Du fait de la symétrie on a la même chose pour $x<-1$ et proche de -1. Δ' est encore asymptote.

e) On trace les asymptotes et on construit la courbe représentative.

Pour terminer on peut étudier la fonction $x\mapsto x+\frac{1}{x}$ comme le suggère le programme. La symétrie est évidente et les deux asymptotes sont faciles à mettre en évidence.

Pour x proche de $0 (x>0)$, $f(x)>\frac{1}{x}$. Or on sait depuis la seconde que l'on trouve $f(x)>10^n$ pourvu que x soit assez proche de 0.

Pour les grandes valeurs de x, $f(x)-x=\frac{1}{x}$ devient aussi proche de 0 que l'on veut.

Les fonctions $x\mapsto x+\frac{a}{x}$ pourront être étudiées à partir de $x\mapsto\frac{a}{x}$ vue en seconde.

Enfin, les courbes représentatives des fonctions f définies ci-dessous pourront être construites ainsi que les asymptotes.

$f(x) = a + x + \dfrac{1}{x}$. Centre de symétrie $I(0,a)$ mis en évidence avec $g(x) = f(x) - a$

$f(x) = x - a + \dfrac{b}{x-a}$. Centre de symétrie $I(a,0)$

$f(x) = x - a + \dfrac{b}{x-c}$ On étudie g telle que $g(x) = f(x) + a - c$ ou $g(x) = x - c + \dfrac{b}{x-c}$

que l'on a vu précédemment. On aura le centre de symétrie $I(c, c-a)$. En définitive, on peut retrouver une grande partie des résultats obtenus avec les programmes de première précédents.

En ce qui concerne la fonction homographique, l'an passé en première E, j'ai personnellement fait une étude complète (4 branches). Le centre de symétrie est plus évident. J'ai continué avec le résultat de cours et son utilisation. Mais l'étude est plus fastidieuse et effraie les élèves.