premières activités mathématiques en seconde

par Francis Labroue
Lycée François Villon, Paris 14e

La classe de seconde présente une particularité : à la différence de la plupart des classes de collège et de lycée, son programme de mathématiques comporte peu de notions nouvelles.

Aussi dans les objectifs de cet enseignement figure plus encore qu'ailleurs *l'acquisition de méthodes de travail efficaces par la pratique de problèmes*, afin d'envisager l'avenir avec un maximum de chances de réussite.

Une telle finalité, qui ne concerne pas uniquement les mathématiques, peut paraître à la fois très stimulante et un peu ambitieuse, un jour de rentrée, à un professeur découvrant dans une classe de seconde ses nombreux élèves aux motivations les plus diverses !

Que faire ? Comment, en mathématiques aussi, participer aux nouveautés de la rentrée en seconde (une nouvelle année scolaire avec une ou plusieurs nouvelles matières et, presque toujours, un nouvel établissement) et tirer profit d'une certaine bonne volontée collective ?

En établissant à l'aide d'un questionnaire à remplir en temps limité un "bilan de rentrée" après quatre ans de collège... et plus de deux mois de vacances ?

En posant des exercices ponctuels de révision... par exemple de calculs dans **R** ?

Ou en proposant, après un rapide exposé des objectifs de la classe en mathématiques, un problème mêlant les aspects numériques et géométriques et conduisant, comme le recommande l'introduction au programme, à *"mettre en lumière différentes phases d'un raisonnement mathématique : conjecture, mise en œuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration et rédaction de la démonstration"* ?

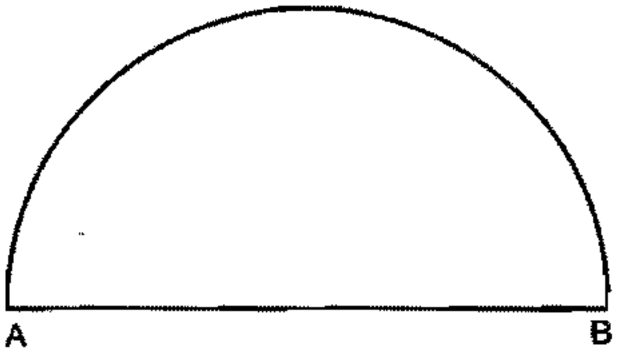
Voici un exemple d'une telle activité qui, s'appuyant uniquement sur des résultats étudiés au collège, peut être envisagée dès le début de la seconde (le point de départ figure en exercice dans quelques manuels).

L'expérimentation en a été faite à la rentrée 1985 dans une classe de 36 élèves ayant tous choisis l'option "langue vivante III", dont la moitié déclarait le jour de la rentrée souhaiter continuer en première A2, la section S n'intéressant que 6 élèves. Quelques mois plus tard les vœux avaient évolué et un tiers de la classe était en première S à la rentrée 1986.

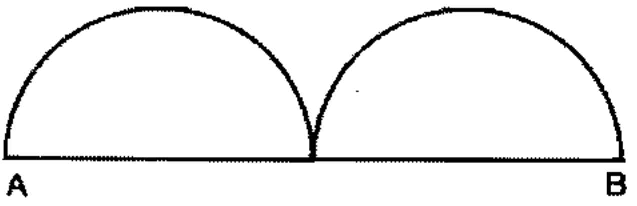
* * *

Première activité (menée en classe entière)

On trace un demi-cercle dont le diamètre est un segment de longueur ℓ donnée :



On divise le diamètre précédent par deux et on construit deux demi-cercles :



On divise chacun des diamètres précédents par deux et on construit de nouveaux demi-cercles :

On construit de façon analogue une figure 4, une figure 5...

Sans difficulté apparente la classe observe par des questions-réponses orales qu'en répétant cette opération on obtient une succession de demi-cercles de plus en plus nombreux et de diamètres de plus en plus petits ; donc ces demi-cercles sont de plus en plus proches du segment de longueur ℓ.

Question : Que devient la longueur totale de ces demi-cercles situés entre A et B lorsque le nombre de ceux-ci augmente ?

On demande tout d'abord une réponse intuitive, individuelle et écrite, obtenue en regardant les figures et sans effectuer le moindre calcul.

Après quelques instants de réflexion, un peu moins de la moitié de la classe pense que cette longueur se rapproche de la longueur ℓ du segment, quelques élèves écrivent qu'elle est constante, l'autre moitié n'inscrivant aucune réponse.

On observe sans surprise qu'une fois les résultats proclamés, les indécis semblent se rallier à la majorité tandis que les rares tenants d'une longueur constante s'affirment sûrs de la justesse de leur point de vue.

A la question, comment prouver aux autres que l'on a raison, la réponse jaillit, faisant immédiatement l'unaminité : par une DÉMONSTRATION !

Très rapidement des élèves proposent de calculer cette longueur pour les figures 1, 2 et 3, et un travail individuel et écrit s'engage pour lequel il est nécessaire de rappeler, pour une minorité et sans dramatisation, la formule donnant la longueur d'un cercle en fonction de son diamètre.

Une correction au tableau s'impose avec d'une part un rappel des résultats utiles pour mener à bien les calculs sur les fractions et d'autre part un rappel du problème posé : dans quel but ces calculs sont-ils effectués ?

C'est alors la surprise chez la plupart des élèves et le triomphe de ceux qui proclamaient que la longueur étudiée est constante.

A-t-on démontré ce dernier résultat ?
Oui, non, les avis divergent, et deux idées sont formulées petit à petit :

- *ce n'est pas parce qu'un résultat est démontré pour les figures 1, 2 et 3 qu'il est toujours vrai ;*
- *c'est toujours le même procédé qui permet de passer d'une figure à la suivante.*

La recherche d'une description détaillée de ce procédé permet de préciser la démonstration : puisque l'on passe d'une figure à la suivante en remplaçant une ou plusieurs fois un demi-cercle par deux demi-cercles de diamètre moitié, il suffit de justifier que dans un tel changement élémentaire la longueur est conservée, et ceci quelle que soit la longueur d du diamètre du demi-cercle de départ.

Il ne reste plus à chaque élève qu'à rédiger la démonstration avec des phrases simples et précises et des figures dessinées avec soin... ce qui demande un certain temps et s'avère très difficile dans bien des cas.

Une rédaction est enfin réalisée collectivement au tableau.

En conclusion, on peut récapituler les *objectifs* de cette première activité :

1. Mettre en évidence la *nécessité de démontrer* : ici, *sans démonstration* presque toute la classe proposait ou acceptait une *réponse fausse.*

2. Observer *les différentes phases d'un raisonnement mathématique* : choix d'une conjecture, recherche d'arguments qui peuvent la justifier ou conduire à une nouvelle conjecture, organisation des arguments permettant de construire une démonstration, enfin rédaction de la démonstration.

3. *Combler certaines lacunes* : non seulement l'oubli de certains résultats est mis en évidence, mais le déroulement de l'activité nécessite leur utilisation répétée et favorise donc leur mémorisation et leur maîtrise.

4. Remarquer que les *calculs* ne constituent *pas un but en soi* mais sont un *outil* pour parvenir à des *résultats* (ici des longueurs) qui doivent être *interprétés en fonction du problème posé* (longueurs égales).

5. Insister sur la *qualité de l'expression orale, écrite et graphique* : l'existence d'opinions contradictoires dans la classe rend indispensable la recherche de clarté et de précision dans la communication.

6. *Mobiliser l'attention des élèves plus longtemps que d'habitude sur un sujet donné* ; la nouveauté du problème, la relative simplicité de la présentation graphique et des notions mathématiques mises en jeu, les rebondissements dans la recherche d'une solution créent à cet égard des conditions particulièrement favorables.

7. Constater que l'aspect apparemment paradoxal du *résultat* (la longueur totale reste constante et supérieure à une fois et demi la longueur du segment alors que les demi-cercles sont de plus en plus proches de ce segment) *conduit* à prolonger cette première étude et à *se poser de nouvelles questions*.

   C'est l'objet des activités suivantes.

*
* *

Deuxième activité (menée en classe entière, terminée en exercice pour la séance suivante)

On prolonge l'activité précédente d'une nouvelle question à résoudre individuellement et par écrit.

> **Question** : Que devient l'aire totale de ces demi-disques situés entre A et B lorsque le nombre de ceux-ci augmente ?

La formule donnant l'aire d'un cercle étant rappelée, les élèves, petit à petit, calculent les aires correspondant aux figures 1, 2 et 3. C'est l'occasion de combler de nombreuses lacunes : fraction élevée au carré...

L'étude, sans indication mais avec documents (corrigé de la première activité), du passage d'une figure à la suivante constitue une difficulté encore infranchissable pour la plupart des élèves.

Le corrigé se fixe trois *objectifs* :

1. Montrer comment le raisonnement utilisé lors de la première activité peut s'adapter au nouveau problème, c'est-à-dire : *apprendre à utiliser dans une nouvelle situation une démarche déjà rencontrée et décrite dans un document.*

2. *Distinguer résultat qualitatif et résultat quantitatif.*

figure A

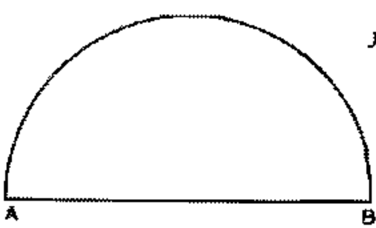


figure a

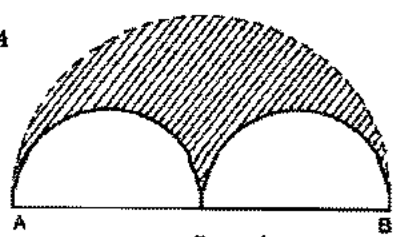


figure b

L'étude du changement élémentaire décrit dans la première activité peut conduire à un résultat *qualitatif* — l'aire correspondant à la figure b est *plus petite* que celle correspondant à la figure a — dont la démonstration tient en un seul mot "regardez !"... et quelques hachures. Elle peut aussi déboucher sur un résultat *quantitatif* — l'aire correspondant à la figure b est *la moitié* de celle correspondant à la figure a — dont la démonstration se résume à quelques lignes de calcul.

On retrouve cette distinction lorsqu'on conclut l'activité : à la différence des longueurs qui restent constantes, les aires considérées sont chaque fois divisées par deux lors du passage d'une figure à la suivante. L'aire étudiée devient donc de plus en plus petite lorsque le nombre de demi-cercles augmente.

Cette dernière phrase traduit un résultat qualitatif, ne nécessitant l'introduction d'aucune définition nouvelle (suite, convergence...) ; il peut donc être obtenu en restant dans le cadre des instructions et commentaires du programme de seconde. On signale aux élèves qu'ils pourront préciser ce résultat dans les classes ultérieures.

3. *Introduire une perspective historique* : la figure b avec l'égalité des aires de la partie hachurée et des deux petits demi-disques prend un tout autre relief lorsqu'on l'accompagne d'informations historiques sur les grandes étapes du développement scientifique ; le cercle en tant qu'objet géométrique lié au nombre π est à cet égard un sujet d'une grande richesse dont une classe de seconde peut tirer profit.

Peut-être est-ce parce que l'on étudie des demi-cercles que l'on obtient ces résultats un peu déroutants.

Aussi les activités suivantes vont-elle faire intervenir de nouvelles figures géométriques.

*

* *

Troisième activité (recherche commencée en Travaux Dirigés, à terminer sous forme de devoir rédigé en temps libre)

Il s'agit de reprendre les questions posées lors des deux premières activités, les demi-cercles étant remplacés par des triangles rectangles isocèles dont l'hypoténuse est située sur le segment AB.

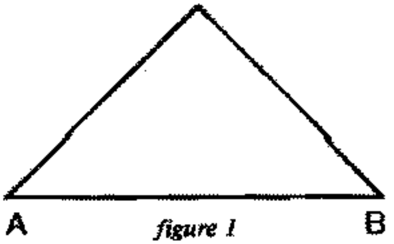


figure 1

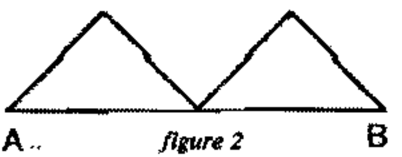
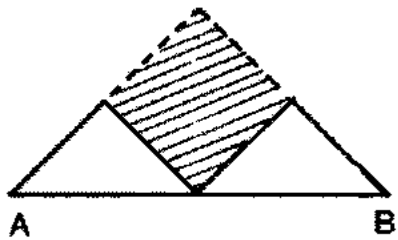


figure 2

Pour le calcul d'un côté de l'angle droit, la trigonométrie dans le triangle rectangle n'évoque aucun souvenir précis ; en revanche l'énoncé du théorème de Pythagore est connu de presque toute la classe.

Cependant son utilisation dans un but précis — ici, calculer un côté de l'angle droit — est une difficulté chez la plupart des élèves : ceux-ci effectuent des calculs en oubliant ce qu'ils cherchent.

D'autre part l'utilisation d'un résultat géométrique (ici la présence d'un carré) pour éviter certains calculs ou contrôler leur exactitude, semble constituer une nouveauté relevant de la magie !



Enfin, des progrès, encore modestes mais cependant très encourageants, sont à noter dans la rédaction des démonstrations.

*
* *

Quatrième activité (complétant le sujet de devoir)

Le tracé des figures doit être soigné et chaque réponse justifiée par des explications claires et précises.

Entre deux points M et N distants d'une longueur ℓ, on construit la succession de figures suivantes obtenues en remplaçant chaque demi-cercle de la première activité par un carré et un segment :

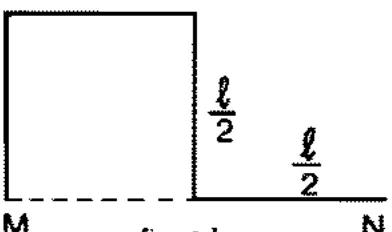


figure 1

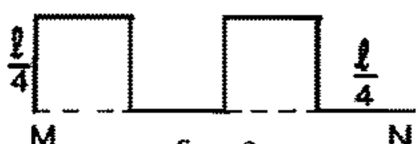


figure 2

ou par un segment et un demi-cercle situé alternativement au-dessus et au-dessous du segment :

figure 1

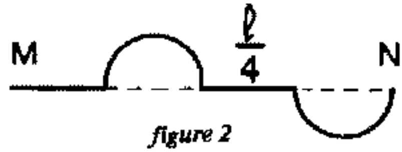


figure 2

1. Tracer, dans chaque cas, la figure 3 lorsque $\ell = 16$ cm.
2. a) Calculer, en fonction de ℓ, pour chacune des trois figures comportant des carrés, la longueur de la ligne tracée joignant M à N et l'aire de la surface comprise entre cette ligne et le segment MN. Que constate-t-on ?

   b) Même question pour les trois figures comportant des demi-cercles
3. (Pour chaque calcul, on demande la valeur exacte du résultat et éventuellement sa valeur approchée à 10^{-1} près obtenue à l'aide d'une calculatrice : il serait illusoire de dépasser la précision du millimètre). On considère la figure 2 relative aux carrés.

   a) Pour quelle valeur de ℓ la longueur calculée au 2. est-elle égale à 10 cm ?

   b) Pour quelle valeur de ℓ l'aire calculée au 2. est-elle égale à 6 cm^2 ?
4. Reprendre la question 3. en considérant la figure 2 relative aux demi-cercles.

Le devoir étant à rendre la semaine suivante, les élèves sont invités à commencer la recherche des réponses le plus tôt possible et à apporter en classe leur brouillon lorsqu'ils sont en situation de blocage. Bien que renouvelé à chaque séance cet appel à exposer ses difficultés sur le devoir ne recueille que très peu d'écho, sauf en ce qui concerne l'utilisation d'une calculatrice.

La correction des copies montre un travail presque toujours sérieux : soin dans le tracé des figures, efforts pour rédiger les démonstrations... En revanche, les erreurs sont nombreuses dans les calculs comportant des fractions, et les deux dernières questions ne sont traitées correctement que dans de très rares cas.

Le corrigé est presque exclusivement consacré à la *recherche d'une méthode de résolution* pour les questions 3. et 4.

On commence par essayer de *poser le problème* en répondant aux deux questions :
— que sait-on ? (de quels renseignements intéressants dispose-t-on ? où les trouver ?)
— que cherche-t-on ?

Puis on cherche à proprement parler une méthode de résolution : comment utiliser ces informations ? à quel type de problème déjà étudié est-on ramené ?...

Il paraît utile de rappeler à ce sujet quelques "évidences", surtout si elles ne sont pas ressenties comme telles par un nombre non négligeable d'élèves.

• Chacun est capable de se poser ces questions et de répondre, au moins partiellement, à certaines d'entre elles ; si la résolution d'un exercice ne semble pas très facile, ces réponses, mêmes incomplètes, doivent figurer sur la copie ; en effet, le fait de ne plus être devant une feuille blanche, d'avoir ainsi déplacé tout seul les difficultés, facilite la poursuite de la recherche.

• Pour reconnaître qu'un problème ressemble à une situation déjà rencontrée et pouvoir ainsi utiliser une solution déjà rédigée, il est nécessaire d'avoir regardé de très près certains corrigés d'exercices et quelques démonstrations de théorèmes du cours signalées par le professeur comme particulièrement utiles. Très concrètement, cela signifie qu'un élève doit non seulement connaître des résultats mais aussi s'imprégner de certaines méthodes de démonstration, par exemple en essayant de refaire tout seul certains exercices déjà corrigés en classe. En cas d'échec ses documents personnels doivent lui permettre de situer et de surmonter ses difficultés ; sinon, il est urgent de prendre contact avec le professeur.

• Enfin un résultat numérique obtenu lors d'une activité mathématique n'est pas nécessairement un nombre entier : autrement dit, si le résultat n'est pas un nombre entier on n'a pas nécessairement faux et on n'est pas obligé de tout rayer sur sa copie. L'étude de la pertinence d'un résultat numérique au regard du problème posé est d'une autre nature !

Cinquième activité (donnée en devoir surveillé)

Il s'agit de deux exercices reprenant les questions posées dans les activités précédentes ; dans le premier les demi-cercles de la première activité sont remplacés par des rectangles pour lesquels, comme précédemment, la longueur considérée est constante. Dans le second, on envisage de nouveaux rectangles situés alternativement au-dessus et au-dessous du segment : la longueur considérée augmente à chaque changement de figure tandis que l'aire reste constante.

Ce premier devoir surveillé avec des résultats très contrastés, souvent ressentis comme décevants, a permis à la plupart des élèves de commencer à mieux percevoir où se situaient leurs difficultés : lacunes concernant des résultats mathématiques, mauvaise gestion du temps pendant le contrôle, inaptitude à refaire des démonstrations que l'on avait "comprises" lors d'un corrigé antérieur, confusion dans la rédaction...

Le moment devient très favorable pour proposer aux élèves une aide, en partie personnalisée, qui ne peut trouver sa pleine efficacité que si ceux-ci ont une attitude active : ils cherchent à mieux déterminer leurs manques et ils demandent au professeur des activités spécifiques d'abord pour combler leurs lacunes puis pour justifier leurs progrès lorsqu'ils se sentent prêts...

La géométrie dans l'espace, abordée dans la classe à l'issue de la troisième activité, permet de mettre en pratique les bonnes résolutions : cette partie est vécue par les élèves comme une découverte, bien qu'en cinquième et troisième les programmes la mentionnent ; elle permet l'étude de situations nouvelles où les calculs n'interviennent pas nécessairement, permettant ainsi d'une part de mieux concentrer l'attention sur l'observation des figures et l'apprentissage des démonstrations, et d'autre part de ne pas reproduire immédiatement chez les élèves la hiérarchie des classes antérieures.

*
* *

Conclusion

Intervenant à un moment privilégié, la rentrée scolaire, le choix des premières activités mathématiques dans une classe est important ; celles décrites ci-dessus ne sont qu'une possibilité qui pourrait être complétée, par exemple par la recherche d'une configuration satisfaisant à telle ou telle contrainte lors du passage d'une figure à la suivante ; d'autre part, leur présentation pourrait être reliée à la technologie et aux arts décoratifs : la longueur étudiée correspondant à celle d'une pièce en fer forgé ou en bois, et la surface considérée étant recouverte de peinture, de feuille de métal ou de film plastique...

Il n'en demeure pas moins que ce premier travail mathématique est destiné à favoriser la réussite de chaque élève au cours de la classe de seconde. Aussi il cherche à être rassurant en utilisant des notions étudiées au collège et à éveiller l'intérêt par la nouveauté de la présentation et l'enrichissement apporté par chaque nouvelle activité, tout en mettant en évidence, chez chaque élève, certaines lacunes (résultats mathématiques, méthode de recherche de résolution...) et en permettant de commencer à les combler, tout ceci en quelques heures seulement.

En substituant à une succession d'exercices ponctuels et répétitifs de révision un ensemble de problèmes plus généraux, on peut respecter la globalité et la spécificité de l'enseignement des mathématiques en seconde : les contenus des programmes du collège sont mis en œuvre lors d'activités faisant émerger des questions qui ne seront abordées de façon systématique qu'en Première et en Terminale.