dans nos classes

une belle fonction inventée par des étudiants de d.e.u.g.

Christophe Beesau, Jérôme Beesau, Bertrand Tortevoix
Etudiants en DEUG première année,
Michel Rivière
Maître de Conférences, Faculté des Sciences, Le Mans

Il m'arrive assez souvent de proposer aux étudiants de première année intéressés par les maths, de petits exercices qui ne sont pas en relation directe avec le cours. Ils sont purement mathématiques ou du genre problèmes plaisants et délectables. A la différence des exercices courants, on ne guide pas vers la solution et le temps de recherche est illimité.

Le lecteur non familiarisé avec la question suivante et n'ayant pas de solution toute faite, aura le plus grand avantage à chercher le temps qu'il faudra sa propre solution à cette question avant de lire la suite s'il veut en apprécier l'intérêt.

"Trouver une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1]$".

Cet exercice bloque toujours beaucoup et n'obtenait jamais de solution directe sans guidage, sauf cette année avec en prime une solution aussi superbe qu'inattendue. Elle se prête à des commentaires didactiques et permet de comprendre où est la difficulté de l'exercice. J'ai pensé qu'elle intéresserait les collègues. Ayant constaté dans le passé la difficulté (pour un étudiant de première année) de cette question, en l'absence de tout cours sur les ensembles infinis, j'ai pensé en faciliter la résolution en posant, avant, deux autres exercices. Résultat : l'exercice a été résolu donc le guidage était (peut-être) utile mais (et peu de pédagogues seront surpris) la solution n'est pas du tout celle que visait le guidage...

J'ai donc d'abord posé les deux questions suivantes :

"Trouver une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$".
"Trouver une bijection entre $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^{*+}$".

Environ un mois plus tard, Bertrand Tortevoix m'apportait les solutions suivantes. Je lui laisse la parole.

La solution de Bertrand Tortevoix

Problème :
a) Trouver une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$
b) Trouver une bijection $\theta : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{*+}$

a) Il est immédiat que : $\varphi \quad \begin{array}{l} \mathbf{N} \to \mathbf{N}^* \\ n \to n+1 \end{array}$ est une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^*$

b) Pour trouver une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$, j'oriente ma recherche dans un premier temps, vers des fonctions continues :

Pour qu'une fonction continue soit bijective, il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone sur l'intervalle considéré. Supposons que θ une fonction continue soit solution de notre problème, θ est donc alors strictement monotone sur $\mathbf{R}^+$: supposons alors θ strictement croissante soit $y_0 \in \mathbf{R}^{*+}$ tel que $\theta(0) = y_0$. Nous pouvons écrire $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ \theta(x) \geqslant y_0 > 0$, donc $\forall y \in]0, y_0[$, y n'a pas d'antécédent par θ ce qui est en contradiction avec le fait que θ est une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$. θ *ne peut pas être continue strictement croissante.*

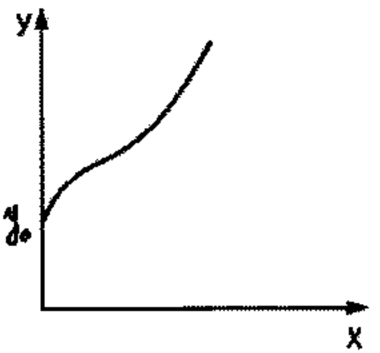


figure 1

De même, supposons θ strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$.
$y_0 = \theta(0)$ devient alors un majorant de l'ensemble des images de $\mathbf{R}^+$ par θ :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^+ , \quad 0 < \theta(x) \leqslant y_0 , \quad \text{donc} \quad \forall\, y > y_0 ,$$

y n'a pas d'antécédent par θ dans $\mathbf{R}^+$, ce qui est en contradiction avec le fait que θ est une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$. *θ ne peut pas être continue strictement décroissante.*

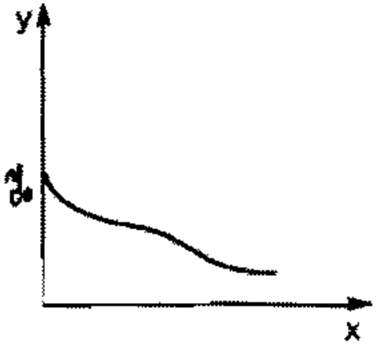


figure 2

***Conclusion :** θ ne peut pas être une fonction continue.*

θ n'est pas apparemment une fonction "classique", je vais donc m'orienter vers une démarche de tâtonnement, en essayant de construire graphiquement une représentation d'une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$.

J'attribue arbitrairement à 0 la valeur 1 :

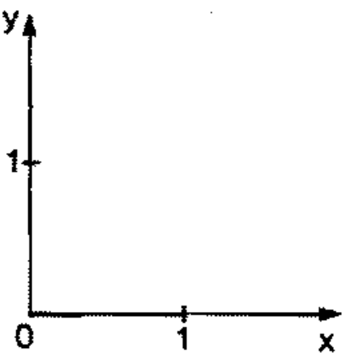


figure 3

Je cherche à atteindre toutes les valeurs de l'intervalle]0,1].

Je trace donc par exemple le segment reliant le point (0,1) et le point (1,0) en excluant ce dernier.

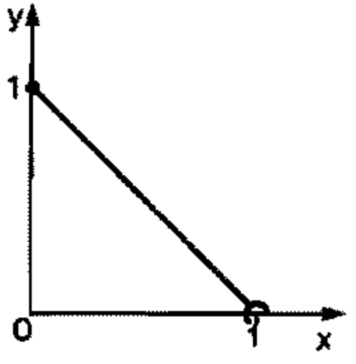


figure 4

Au point d'abscisse 1, j'attribue arbitrairement la valeur 2 et trace un segment parallèle au précédent rejoignant le point (1,2) et le point (2,1) ce dernier étant exclu.

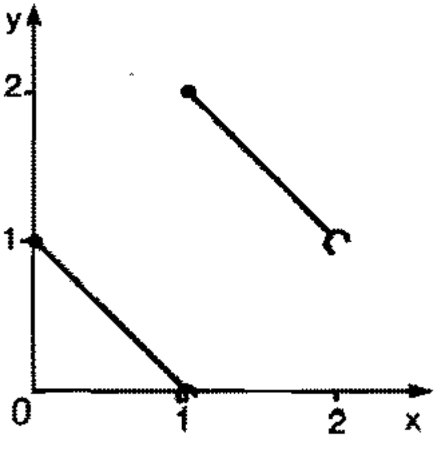


figure 5

Selon le même procédé répété à l'infini, je trace ainsi la représentation d'une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

L'allure de cette courbe rappelle celle de fonctions en escalier comme celle de la fonction partie entière. De plus, chaque segment est parallèle à la droite $y = -x$.

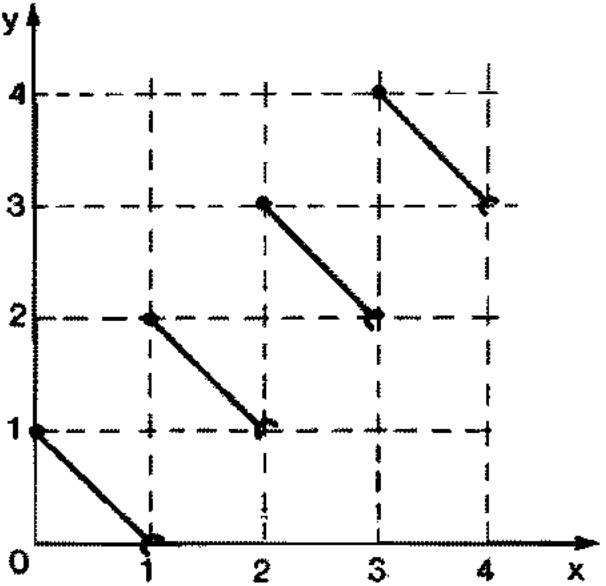


figure 6

En fait, le graphe que j'ai obtenu est la représentation graphique de la fonction suivante :

$$\theta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{*+} \\ x \to 2\,\mathrm{E}(x) + 1 - x \end{array} \right.$$

Il ne s'agit que d'une solution à notre problème, il en existe beaucoup d'autres.

Je demande à Tortevoix de venir présenter sa solution au tableau pour les autres étudiants et je distribue de nouveaux exercices plaisants... dont celui-ci :

"Trouver une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1]$".

Cinq jours plus tard, Christophe et Jérôme Beesau me donnent la solution qu'ils vont vous présenter maintenant.

Géométriquement, elle s'inspire manifestement de la solution précédente. Analytiquement, c'est sans doute ce qu'on peut faire de plus beau dans le genre.

La solution de Christophe et Jérôme Beesau

On sait que, par théorème, l'image par une fonction continue d'un segment est un segment ; donc, la fonction solution ne peut pas être continue. On cherche alors une fonction admettant un point de discontinuité, mais ceci ne fait que déplacer le problème vers un intervalle contenu dans $[0,1]$. On pense donc à une fonction admettant une infinité de points de discontinuité ; il vient alors l'idée d'une fonction dont le graphe serait la figure ci-dessous. Les points de discontinuité sont les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, l'image de 1 est 1, et l'intervalle $[0,1]$ est découpé en une succession d'intervalles du type $[u_n, u_{n+1}[$ ayant pour image un segment de droite, de pente 1.

La fonction a donc une expression du type $f(x)=x+K$, où K est une fonction de n constante sur $[u_n, u_{n+1}[$; comme $f(u_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, on peut trouver K : $K=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$. On cherche alors une fonction g, associant à tout x de $[u_n, u_{n+1}[$ la valeur de n qui correspond :

$$\text{soit } x\in[u_n, u_{n+1}[\;;\; u_n\leqslant x<u_{n+1} \iff 1-\frac{1}{2^n}\leqslant x<1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\iff \frac{1}{2^{n+1}}<1-x\leqslant\frac{1}{2^n}$$

$$\iff 2^n\leqslant\frac{1}{1-x}<2^{n+1}$$

$$\iff n\leqslant\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{\ln 2}<n+1$$

D'où $g(x) = E\left(\dfrac{\ln\frac{1}{1-x}}{\ln 2}\right)$

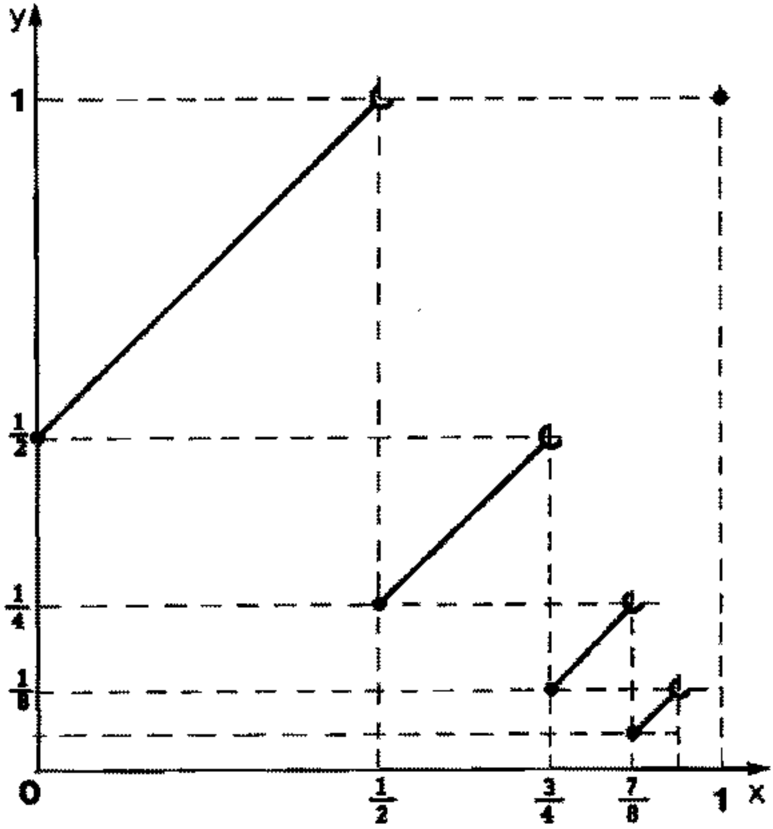
On a alors l'expression de la fonction :

$$E\left(\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{\ln 2}\right)$$

$$\forall x\in[0,1[,\ f(x)=x-1+\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(1) = 1$$

figure 7



Un étudiant de première année cherche naturellement à construire la solution à l'aide des fonctions usuelles. En général, il n'y parvient pas et on a compris pourquoi : la solution trouvée ici ne saute pas aux yeux, c'est le moins qu'on puisse dire. En fait, c'est le détour par la géométrie qui permet la construction.

Cette solution a l'intérêt didactique de donner une expression analytique avec des logarithmes pour une fonction affine par morceaux. On peut en être surpris mais en analysant la solution, on verra qu'à travers l'utilisation de la fonction partie entière, les logarithmes ne concernent que le découpage du segment [0,1]. Je suis habitué à ce genre de formule en combinatoire mais j'avoue avoir été surpris la première fois que j'ai vu apparaître des logarithmes dans des formules de dénombrement concernant des problèmes à paramètres tous entiers. Rien de plus naturel pourtant : si n est un entier positif alors $p=2^n$ est un entier positif, cependant

$$n = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}.$$

Cette solution permet aussi de comprendre pourquoi on trouve dans le bagage de fonctions de tout micro-ordinateur outre les polynômes, cos, sin, exponentielles et logarithmes, deux fonctions capitales : valeur absolue et *partie entière*.

Moi qui croyais avoir tout fait pour faciliter la découverte de la solution ensembliste (plus simple... quand on l'a trouvée), vous devinez ma surprise de recevoir... une solution analytique.

Enfin, je conseille au lecteur non familiarisé avec ces questions de résoudre l'exercice suivant :

"E est un ensemble infini, $a \in E$, trouver une bijection entre E et $E - \{a\}$"

Il constatera la simplicité qui résulte de l'impossibilité de faire de la géométrie ou de l'analyse, pour résoudre le problème, si l'ensemble E n'a été a priori muni d'aucune structure (géométrique, algébrique...). L'intérêt didactique que je vois à cela est de montrer qu'il est difficile et pourtant parfois profitable de s'interdire d'utiliser une structure même si elle existe a priori dans l'ensemble que l'on étudie. C'est l'un des apports de ce que l'on convient d'appeler : mathématiques modernes.