études didactiques

qu'est-ce que "faire des maths" ?

l'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques

par Bernard Charlot
IREM de Nantes (Centre du Mans)

Qu'est-ce que faire des maths ? A celui qui enseigne quotidiennement les mathématiques, cette question peut paraître un luxe, voire un jeu quelque peu gratuit et sans grand intérêt. Question de philosophe, en somme, autrement dit, pour un grand nombre d'enseignants de mathématiques, question dont il ne faut surtout pas se mêler ! Et pourtant ! Depuis vingt ans, les réformes de l'enseignement des mathématiques se sont succédées à un rythme tel que beaucoup de professeurs de mathématiques ne savent plus trop ce qu'on attend d'eux et en arrivent à se demander : qu'est-ce qu'enseigner les maths ? et, finalement, qu'est-ce que les mathématiques ? Je voudrais ici, dans le prolongement de la conférence que j'ai faite à Port Barcarès pour le congrès de l'A.P.M.E.P., en 1985, proposer quelques pistes et souligner combien il importe de comprendre l'épistémologie (1) implicite qui sous-tend toute pratique d'enseignement des mathématiques (2).

---

(1) Théorie de la connaissance, de son objet et de ses méthodes.

(2) Ce texte est la mise en forme d'une conférence-débat qui a eu lieu à Cannes en mars 1986 à l'invitation de la Régionale de Nice-Cannes, et plus particulièrement de Christiane Zehren et Christian Frattini. C. Frattini en a rédigé une première version à partir d'un enregistrement sur cassette. L'article ici présenté est écrit à partir de mes notes personnelles et de la version proposée par C. Frattini, que je remercie pour son patient travail et pour sa persévérance à m'inciter à prendre la plume.

La pédagogie que les textes officiels et l'Inspection générale demandent aux enseignants de mathématiques de mettre désormais en œuvre est très différente de celle qui s'était mise en place lors de la réforme des maths modernes au début des années 70. Cependant, il serait intellectuellement et moralement incorrect de comparer directement la pédagogie **pratiquée** à l'occasion de l'instauration de la réforme des maths modernes et la pédagogie **conseillée** aujourd'hui par les instructions officielles. En effet, d'une part, la pédagogie pratiquée n'est pas celle que préconisaient les promoteurs de la réforme des maths modernes, et notamment l'A.P.M.E.P. et au sein de l'A.P.M.E.P. Gilbert Walusinski, et, d'autre part, rien ne garantit que la pédagogie qui devrait se développer prochainement dans les collèges et les lycées sera elle-même conforme aux vœux officiels. Comparons donc ce qui est comparable : les intentions avec les intentions, les pratiques avec les pratiques.

Je ne reviendrai pas longuement sur les intentions pédagogiques des promoteurs de la réforme des maths modernes, puisque l'article où je les analyse a déjà été publié (3). Je rappellerai simplement quelques points essentiels. La Charte de Chambéry élaborée en 1968 par l'A.P.M.E.P. préconisait une pédagogie "active, ouverte, la moins dogmatique possible, faisant appel au travail par groupe et à l'imagination des enfants" et proscrivait le "jargon impénétrable", le "symbolisme abscons", les "austères abstractions". Jean Dieudonné, auquel on reproche souvent le formalisme qui s'est abattu sur l'enseignement des mathématiques, demandait en fait que l'on "travaille pendant un certain temps sur la base expérimentale ou semi-expérimentale, c'est-à-dire en faisant constamment appel à l'intuition". Dans les faits, nous le savons, l'enseignement des mathématiques sera emporté par une vague de formalisme, avoué dans les classes les plus avancées, masqué dans l'enseignement primaire et parfois au collège derrière des situations "concrètes" très souvent artificielles, pour ne pas dire tarabiscotées. Pourquoi ces "effets pervers" de la réforme ? Que s'est-il passé ? Les intentions pédagogiques mises en avant, à mon sens excellentes, étaient en contradiction avec l'épistémologie implicite qui sous-tendait la réforme des maths modernes. Les promoteurs de la réforme, en effet, concevaient la mathématique — singulier qui, en lui-même est déjà hautement significatif — comme une "langue universelle", la langue de la logique, de la structure, des symboles, bref du discours scientifique et technique moderne. Dès lors, si les élèves sont bien invités à mettre en œuvre une activité mathématique, cette activité ne consiste pas à construire des concepts en réponse à des problèmes, mais à repérer et à nommer les structures mathématiques fondamentales qui permettent d'introduire de l'ordre dans la réalité naturelle et sociale. Aussi l'activité des élèves, lors même qu'elle est sollicitée, ce qui n'est pas toujours le cas, n'est que prétexte à une interminable leçon de vocabulaire où

(3) *Actes de l'Université d'Eté de juillet 1984 sur l'histoire des mathématiques* (publiés par l'Université du Maine), ou *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, février 1986.

les élèves apprennent à identifier et à nommer des structures qu'en réalité ils ne connaissent pas, faute de les avoir préalablement construites, et utilisées dans des situations ayant pour eux un sens.

La pédagogie préconisée par les instructions officielles récentes est cette fois sans ambiguïté. Elle ne se propose pas d'appréhender le plus rapidement possible les structures mathématiques fondamentales dans les situations "concrètes" mais se centre sur la construction de savoirs mathématiques en réponse à des problèmes mathématiques. La démarche de l'enseignement mathématique n'est plus définie par référence à des degrés d'abstraction mais par la construction progressive de concepts mathématiques qui tiennent leur validité d'abord de leur pouvoir instrumental dans la résolution de problèmes. "Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes" (programme des collèges). "On a voulu insister sur l'importance du **travail personnel** des élèves, tant en classe qu'à la maison, et sur le rôle formateur des **activités de résolution de problèmes**" (projet de programme d'avril 1985 pour les Premières S et E).

Cette option pédagogique n'est pas nouvelle dans l'absolu ; un certain nombre d'enseignants la défendent et la pratiquent depuis longtemps déjà. Ce qui est nouveau, en revanche, c'est qu'elle est aujourd'hui officielle, qu'elle définit ce que l'Inspection générale attend (en principe !) de la masse des enseignants. Mais si l'on ne veut pas que se produisent à nouveau ces effets pervers que l'on a pu connaître lors de la réforme des maths modernes, encore faudrait-il expliquer aux enseignants quels sont les fondements épistémologiques de cette réforme — et les former en conséquence. Car c'est bien une autre conception de l'enseignement des mathématiques qui est désormais mise en avant, et même une autre conception de l'activité mathématique. Les orientations pédagogiques actuelles proposent une rupture, que les maths "modernes" n'avaient pas su opérer, avec l'épistémologie et même l'ontologie (4) classiques sous-jacentes à la conception culturelle et scolaire des mathématiques et de leur enseignement. C'est cette rupture que je voudrais ici définir, en en soulignant les conséquences pédagogiques. Car si les professeurs de mathématiques appliquent les nouvelles directives pédagogiques sans repenser leur conception même de l'activité mathématique, on court non seulement à l'échec mais à un nouveau séisme pédagogique qui pourrait bien être d'une aussi grande ampleur que celui qui a accompagné la réforme des maths modernes.

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Ma réponse globale sera que faire des maths, c'est les FAIRE, au sens propre du terme, les construire,

---

(4) Théorie de l'être.

les fabriquer, les produire, que ce soit dans l'histoire de la pensée humaine ou dans l'apprentissage individuel. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire réinventer par les élèves des mathématiques qui existent déjà, mais de les engager dans un processus de production mathématique où leur activité ait le même sens que celle des mathématiciens qui ont effectivement forgé des concepts mathématiques nouveaux.

Cette idée que faire des mathématiques, c'est les FAIRE, n'est pas la conception dominante dans l'univers scolaire actuel. La conception la plus courante postule que les mathématiques n'ont pas à être produites, mais à être découvertes. Les êtres mathématiques existent déjà, quelque part, dans le ciel des Idées. Dès lors, le rôle du mathématicien n'est pas de les créer, de les inventer, mais de les découvrir, de **dévoiler** des vérités mathématiques qui existaient déjà mais n'étaient pas encore connues. Les vérités mathématiques ne peuvent être énoncées que grâce au travail du mathématicien, mais elles sont ce qu'elles sont, données de toute éternité, indépendamment de ce travail. L'enseignement classique des mathématiques repose sur une épistémologie et une ontologie platoniciennes, que la réforme des maths modernes a encore confortées : les Idées mathématiques ont une réalité en soi. Le mathématicien René Thom n'hésite d'ailleurs pas à affirmer explicitement qu'un mathématicien ne peut être que platonicien.

Une fois dévoilée, la vérité mathématique est exposée au regard de qui sait regarder assez haut dans le ciel des Idées. Le rôle du professeur de mathématiques consiste alors à faire partager à l'élève la vision à laquelle il a déjà accédé, à tourner l'esprit de l'élève — "l'œil de l'âme", disait Platon — vers le monde mathématique. Dans cette conception, la vérité mathématique est **donnée** à qui sait la voir, à qui a un pouvoir d'abstraction suffisant. Le vocabulaire pédagogique quotidien, resté très platonicien, véhicule constamment cette métaphore du regard, de la vision, de la lumière. Comme disent les élèves, "je vois" ou "je ne vois pas", "j'ai juste" ou "j'ai pas juste", et en matière de mathématiques, il n'y a pas à discuter, à hésiter, si on ne vise pas dans le mille, on est à côté de la plaque. Le vocabulaire professoral, pour être plus riche, n'en relève pas moins du même registre. Certains élèves sont des lumières, ils sont brillants, étincelants, éclairés, et voient du premier coup. D'autres, hélas, sont bouchés, voire aveugles, et pour eux tout reste obscur. Il y a, en somme, des élèves cent watts et des élèves quarante watts et le professeur n'y peut rien dès lors qu'il a présenté son cours aussi "clairement" que possible.

Sur cette métaphore du regard se greffent deux discours interprétatifs. Tout d'abord, l'interprétation de type biologique qui s'habille aujourd'hui d'arguments à prétentions génétiques mais reprend en fait le discours sur l'intelligence que tenait déjà Platon, il y a vingt-cinq siècles : les mathématiques sont données à ceux qui ont un **don**, une capacité d'abstraction suffisante pour apercevoir les contenus conceptuels qui leur sont proposés — ce que la phrénologie (5) appelait il y a un siècle et demi la "bosse des maths". La seconde interprétation, proposée par la sociologie de l'éducation, explique que certains enfants subissent des handicaps socio-culturels, manquent du **capital** culturel nécessaire pour manier un langage abstrait et accéder ainsi à l'univers mathématique. Ces deux thèses, bio-génétique et socio-culturelle, sont très différentes mais partagent pourtant un postulat commun : les concepts, les connaissances, les cultures sont conçus comme **donnés**, transmis à des héritiers sous forme de don naturel ou de capital socio-culturel.

A cette idée de mathématiques données, sous une forme ou une autre, j'oppose l'idée de mathématiques construites, je dirai même, en utilisant ici de façon quelque peu provocatrice le vocabulaire de la technique, de mathématiques **fabriquées**. L'activité mathématique n'est pas regard et dévoilement, mais création, production, fabrication. Les concepts mathématiques ne sont pas un bien culturel transmis héréditairement comme don ou socialement comme capital mais le résultat d'un **travail** de la pensée, celle des mathématiciens à travers l'histoire, celle de l'enfant à travers son apprentissage. Le Don et le Capital d'un côté, le Travail de l'autre : c'est évidemment à dessein que j'emploie ces termes, pour bien faire comprendre quel est le problème de fond posé par la démocratisation de l'enseignement des mathématiques. Cette démocratisation implique une rupture qui ne traverse pas le monde des aptitudes "naturelles" ou de l'environnement socio-culturel au sens vague du terme, mais qui est une rupture sociale au sein des pratiques d'enseignement elles-mêmes. Faire des maths n'est pas une activité qui permettrait à un petit nombre d'élus par la nature ou la culture d'accéder à un monde très particulier de par son abstraction. Faire des maths, c'est un travail de la pensée, qui construit des concepts pour résoudre des problèmes, qui pose de nouveaux problèmes à partir des concepts ainsi construits, qui rectifie ces concepts pour résoudre ces nouveaux problèmes, qui généralise et unifie peu à peu ces concepts dans des univers mathématiques qui s'articulent entre eux, se structurent, se déstructurent et se restructurent sans cesse. Démocratiser l'enseignement des mathématiques suppose d'abord que l'on rompe avec une conception élitiste d'un monde abstrait qui existerait en soi mais ne serait accessible qu'à certains et que l'on pense l'activité mathématique comme un travail dont la maîtrise est accessible à tous moyennant le respect de certaines règles.

Ce sont ces règles, c'est-à-dire ces techniques pédagogiques qui permettent à l'élève de maîtriser le travail de sa pensée mathématique, que je voudrais maintenant expliciter quelque peu.

(5) Théorie qui prétendait repérer les aptitudes naturelles à partir de la forme du crâne. On sait (!), aujourd'hui encore, qu'un front haut et chauve est signe d'intelligence !

Examinons d'abord les conséquences pédagogiques de l'épistémologie et de l'ontologie qui sous-tendent l'apprentissage traditionnel des mathématiques. Le mathématicien dévoile des vérités et l'enseignant doit tourner l'œil de l'âme de l'élève vers ces vérités. Dès lors, ce que l'enseignant retient de l'activité du mathématicien, ce n'est pas cette activité elle-même, que le plus souvent il ignore ou qu'en tout état de cause il passe sous silence, ce sont les résultats de cette activité, théorèmes, démonstrations, définitions, axiomes. Aussi l'enseignant est-il amené à sur-valoriser la forme dans laquelle ces résultats sont présentés. Si l'on pense à l'activité du mathématicien, cette sur-valorisation de la forme est paradoxale : ce n'est pas la forme qui donne sens aux résultats, puisqu'elle n'est déterminée qu'a posteriori, quand les résultats ont été acquis par d'autres voies, beaucoup plus cahotantes : aucun mathématicien n'a jamais rien inventé par une démonstration rigoureuse respectant les règles canoniques. Mais ce paradoxe s'explique si l'on se rappelle que l'objectif est de présenter à l'élève la Vérité mathématique dans toute sa pureté et sa splendeur : l'enseignant tire le diamant de sa gangue et présente l'être mathématique dans la définition impeccable qui doit permettre à l'élève de l'appréhender dans son éclat le plus vif. Dès lors, la vertu mathématique essentielle devient la rigueur, et notamment la rigueur du langage puisque celui-ci, quand on a écarté l'activité mathématique elle-même, est le seul support du concept mathématique. Aussi l'enseignant exige-t-il de l'élève, immédiatement, dès ses premiers pas, rigueur de la pensée et du langage, en oubliant que chez le mathématicien lui-même cette rigueur ne vient qu'à la fin, au terme d'un long processus d'approximations et de rectifications. Le savoir mathématique apparaît alors à l'élève non pas comme un système de concepts permettant de résoudre des ensembles de problèmes mais comme un grand discours codifié, normalisé, symbolique, "abstrait".

Cette coupure entre l'activité mathématique et ses résultats, entre les problèmes et les concepts, engendre un échec scolaire important, tout particulièrement chez les enfants des familles populaires, qui n'ont pas été habitués dans leur milieu à ce maniement d'un langage explicite, formalisé, codifié (6). Pour expliquer cet échec, on dit que les mathématiques sont difficiles parce qu'elles sont abstraites et on en déduit qu'avec les élèves en difficultés scolaires, il faut enseigner les mathématiques en partant du concret. En somme, il faudrait construire un échafaudage particulier permettant à ceux qui n'ont pas, ou pas encore, un pouvoir d'abstraction suffisant de s'élever peu à peu vers le monde mathématique. On élabore à cet effet du matériel, des situations, des stratégies qui, à l'analyse, se révèlent en fait comme pseudo-concrètes : blocs logiques en maternelle, relations familiales à représenter par des diagrammes dans le primaire, étude des fiches de paye en CPPN et CPA, etc. Et l'on se précipite ainsi dans des difficultés encore plus grandes !

---

(6) B. Charlot, L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir, *Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 342, février 1984.*

Il y a là une confusion entre pédagogie active et pédagogie "concrète" qui provoque beaucoup de dégâts dans l'enseignement. On confond l'activité intellectuelle de l'élève et l'activité physique de l'élève sur du matériel manipulable ou l'activité de l'élève à partir de situations familières. Ce qui est important, c'est l'activité intellectuelle de l'élève, dont les caractéristiques, telles que Piaget les a décrites, sont semblables à celles que les historiens des mathématiques relèvent chez le mathématicien créateur : la pensée part d'un problème, pose des hypothèses, opère des rectifications, des transferts, des généralisations, des ruptures, etc., pour construire peu à peu des concepts, et, à travers cette construction des concepts, pour édifier ses propres structures intellectuelles. Chez le jeune enfant, cette activité intellectuelle suppose un support manipulable (jusqu'à environ 7 ans), puis, au moins représentable (jusqu'à au moins 12 ans). Mais ce qui est important, c'est l'activité intellectuelle sur ce support et non le caractère "concret" de celui-ci. En outre, lors même que l'apprentissage peut se passer de ce support et aborder directement les relations elles-mêmes, il ne reste possible qu'au travers d'une activité intellectuelle.

Bref, si l'apprentissage des mathématiques est aujourd'hui si difficile, ce n'est pas parce que les mathématiques sont abstraites, c'est parce que cet apprentissage ne repose pas sur une activité intellectuelle de l'élève mais sur la mémorisation et sur l'application de savoirs dont l'élève n'a pas vraiment compris le sens. La solution aux difficultés actuelles des enseignants et des élèves n'est pas à rechercher du côté du couple abstrait/concret, qui n'est qu'un alibi idéologique à la sélection, mais du côté d'un apprentissage des mathématiques fondé sur l'activité intellectuelle de celui qui apprend.

Soit, dira-t-on, mais dans la pratique pédagogique quotidienne, qu'est-ce que cela veut dire ?

Tout d'abord que la rigueur de la pensée et la correction du vocabulaire ne sont pas, ne doivent pas être, des exigences imposées à l'élève d'emblée, dès le début de l'apprentissage. Certes, la rigueur de la pensée et du langage reste un des objectifs essentiels de l'apprentissage des mathématiques. Mais, précisément, elle est un objectif, et non la base, le point de départ de la pédagogie des mathématiques. L'élève doit apprendre à être rigoureux mais il ne peut y parvenir que si son activité elle-même lui en montre la nécessité. L'enseignant doit aider l'élève à percevoir et à intégrer la nécessité de la rigueur, tout comme il doit l'aider à construire des concepts mathématiques. Cette aide ne passe pas par un discours moralisateur, des objurgations répétées ou une répression tatillonne de la moindre déviation hors des normes, mais par un approfondissement de l'activité mathématique de l'élève. La rigueur ne doit pas être une exigence imposée de l'extérieur par le maître — et donc ressentie par l'élève comme arbitraire — mais une nécessité pour celui qui veut communiquer les résultats de son activité, les défendre contre la contestation, les utiliser comme instruments pour résoudre de nouveaux problèmes. La rigueur, tout comme le savoir, se construit à travers l'activité mathématique. Mais encore faut-il qu'une exigence prématurée de rigueur ne stérilise pas toute activité de l'élève. Cela veut dire notamment qu'un enseignement mathématique ne devrait jamais commencer par des définitions, en tout cas par des définitions exposées dans les règles de l'art. Au mieux, un tel enseignement est inutile : si l'élève comprend la définition, qui condense les propriétés fondamentales de l'objet mathématique dont il va être question, c'est qu'il connaît déjà l'essentiel. Au pire — qui est aussi, hélas, le cas le plus fréquent — un cours qui commence par une définition provoque l'échec scolaire. L'élève, faute d'une activité mathématique préalable, ne comprend pas cette définition, mais il est au moins averti d'emblée qu'il ne comprend rien à ce dont on va parler et que ce n'est même pas la peine d'essayer. Seuls ceux qui ont acquis antérieurement une solide confiance dans leurs capacités mathématiques s'accrochent vraiment et, au terme du processus cours-exercices d'application, finissent par comprendre cette définition qu'on leur avait assénée d'emblée.

Le point de départ de l'activité mathématique n'est pas la définition, mais le problème. Si certains élèves, malgré tout, apprennent des mathématiques dans la stratégie pédagogique actuelle, c'est avant tout dans les moments où ils font des problèmes et doivent, pour les résoudre, se construire un savoir mathématique en s'aidant des bribes de cours qu'ils ont assimilées et des quelques paragraphes de manuel qu'ils peuvent comprendre seuls. Le malheur est qu'ils apprennent ainsi en marge de la stratégie pédagogique officielle, chez eux, quand l'enseignant n'est pas là pour les aider à surmonter les obstacles et à approfondir leur pensée. Comment s'étonner, dès lors, que réussissent surtout ceux qui trouvent dans leur milieu familial un substitut de l'enseignant ?

Le problème peut-il être proposé par le maître ou est-ce là une atteinte intolérable aux droits de l'enfant ? En réalité, peu importe par qui le problème est posé et il ne faut surtout pas s'engager dans l'impasse du débat directivité/non-directivité. L'essentiel n'est pas de savoir qui propose le problème, mais s'il a un sens pour l'élève, s'il lui permet d'enclencher une activité intellectuelle et de se construire des savoirs mathématiques. Le cours magistral précédant le moment de recherche active par l'élève ne me semble pas constituer une méthode pertinente d'enseignement des mathématiques. Mais il serait à coup sûr plus efficace si l'enseignant, au lieu de présenter des contenus mathématiques, partait au moins de problèmes et introduisait les concepts comme instruments pour résoudre ces problèmes.

Reste à s'entendre sur la notion de problème. Le problème qui peut servir de point de départ à l'activité intellectuelle de l'élève n'est certainement pas un exercice où l'élève applique de façon quasi mécanique une formule ou un processus opératoire. Un tel exercice constitue une tâche, fortement routinière, et donc aussi sécurisante pour l'élève, pas un problème. Il n'y a problème, au sens strict du terme que si l'élève est obligé de travailler l'énoncé de la question qui lui est posée, de structurer la situation qui lui est proposée. C'est parce que les élèves sont trop rarement confrontés à de tels problèmes qu'ils répondent à des questions absurdes sur l'âge du capitaine ou qu'ils sont pris d'angoisse en découvrant qu'ils ont répondu aux questions en laissant inutilisée une donnée numérique. Penser, ce n'est pas seulement trouver une réponse à une question bien posée, c'est aussi, et d'abord, formuler la question pertinente quand on se trouve face à une situation problématique.

L'activité mathématique n'est donc pas simplement recherche de la réponse correcte. Elle est aussi élaboration d'hypothèses, de conjectures, qui sont confrontées à celles des autres et testées dans la résolution du problème. Un concept approximatif est forgé pour résoudre un certain type de problème. Puis la pensée rebondit quand l'élève utilise ce concept pour résoudre d'autres problèmes, ce qui exige transferts, rectifications, ruptures, etc., selon un processus analogue à celui que l'on peut observer dans l'histoire des mathématiques. Il me semble donc essentiel de comprendre que l'élève ne construit pas **un** concept en réponse à **un** problème, mais, selon l'excellente formule des chercheurs de Louvain-la-Neuve (7), **un champ de concepts** qui prend sens dans **un champ de problèmes**. Un concept mathématique se construit articulé à d'autres concepts, à travers une série de rectifications et de généralisations rendues nécessaires par son utilisation dans un champ de problèmes parents. Il me semble essentiel également de comprendre que le concept mathématique existe sous divers statuts, qui correspondent à autant de moments de l'activité mathématique. Je reprendrai ici une formule, elle aussi excellente, de Brousseau : "l'élève doit agir, formuler et valider" — et, ajouterai-je, institutionnaliser. Lorsqu'un élève est capable de dire si une règle mathématique s'applique dans divers exemples et contre-exemples sans pour autant pouvoir formuler clairement cette règle, ni même expliciter sa réponse, il a compris quelque chose. Il est capable d'utiliser le concept comme instrument d'action, sans pouvoir encore le formuler et essayer de le valider. La seconde étape, celle de la formulation, vient ensuite, si du moins l'enseignant parvient à placer l'élève dans une situation où cette formulation apparaît nécessaire. Encore cette formulation présente-t-elle divers degrés : règle grossière exprimée dans un charabia bien peu rigoureux, règle juste mais correspondant à des cas particuliers, règle générale. L'élève devra passer d'un niveau de formulation à un autre lorsqu'il lui faudra valider sa règle, c'est-à-dire la communiquer à d'autres, qu'il doit convaincre car eux-mêmes défendent d'autres formulations. Enfin, vient l'institutionnalisation portée par l'enseignant : celui-ci énonce la règle telle qu'elle a cours dans la communauté mathématique.

(7) cf. *Dialogue*, revue du G.F.E.N., n° 54 bis, mai 1985.

La rigueur, on le voit, n'est pas sacrifiée, pas plus que la parole "officielle" du maître n'est exclue. Mais la rigueur se construit progressivement, comme exigence interne à l'activité mathématique elle-même, et l'exposé magistral vient couronner la recherche des élèves, comme moment de mise en ordre, de structuration, de synthèse.

Cette description de l'activité mathématique met en cause deux idées, qui circulent comme des pseudo-évidences chez ceux qui contestent la pédagogie dominante des mathématiques : celle de jeu et celle d'utilité.

Si par jeu mathématique, on désigne une activité où l'élève prend du plaisir — ce qui n'exclut pas l'effort, mais le soutient —, une activité qui permet un fonctionnement de la pensée non contraint par des règles extérieures vécues par l'élève comme artificielles et arbitraires, je n'ai pas d'objection à formuler. Encore que l'élève ait le droit de voir son activité socialement reconnue comme un travail sérieux et non comme un jeu et que certains élèves soient angoissés par l'idée qu'ils jouent à l'école au lieu d'y travailler ! Mais si, par jeu mathématique, on désigne une activité ponctuelle non articulée autour d'un champ de problèmes, non ancrée dans un programme, sans lendemain ni intellectuel ni institutionnel, je ne suis plus d'accord. Ces moments d'aventure mathématique ne sont pas à exclure, mais ils ne peuvent pas, à mon sens, constituer la base d'un apprentissage des mathématiques. Celui-ci suppose l'articulation entre des situations de recherche qui, pour le maître au moins, sont riches de progression future. L'élève doit sentir qu'il progresse et l'enseignant, de son côté, ne peut pas se délivrer de toute dépendance à l'égard des programmes.

L'idée de proposer aux élèves en situation de refus scolaire des mathématiques "utiles" fait pendant, en quelque sorte, à l'idée de jeu mathématique. Parler de jeu, c'est recentrer l'apprentissage sur l'activité elle-même, en tenant le résultat de cette activité comme finalement négligeable. Parler d'utilité, c'est au contraire occulter à nouveau l'activité mathématique et insister sur la valeur du résultat, mais dans le monde de la vie quotidienne et non plus dans un univers mathématique abstrait. Il est intéressant de constater que ceux qui enseignent les mathématiques à des élèves qui a priori s'en méfient oscillent souvent entre la stratégie du jeu et celle de l'utile. Ces stratégies, d'une certaine façon inverses, désarticulent toutes deux une activité mathématique qui est activité aboutissant à des résultats. Cette activité ne peut se définir comme jeu, car son sens est d'engendrer des résultats, et non de se satisfaire d'elle-même. Ces résultats ne peuvent non plus se définir par leur utilité dans la vie quotidienne car ils tirent leur sens de l'activité qui les a créés. Ces deux stratégies, finalement, se résignent au rapport négatif des élèves au travail mathématique, qu'elles cherchent à contourner par l'idée de jeu ou d'utilité au lieu de reconstruire ce rapport en faisant vivre l'activité mathématique comme travail créateur. Au fond, elles entérinent, chacune à leur manière, l'inaptitude de certains élèves à FAIRE des mathématiques, l'une parce qu'elle fait mais ne pose pas ce qu'elle fait comme sérieux, l'autre parce qu'elle veut doter les élèves d'outils mathématiques mais leur laisse croire qu'il n'est pas essentiel qu'ils les aient forgés eux-mêmes.

Aussi est-il bien difficile d'enseigner des mathématiques "utiles". Passons rapidement sur le caractère souvent bien artificiel de cette utilité proclamée. L'essentiel n'est pas là, mais dans une contradiction de fond. Viser l'utile, c'est viser le résultat, et ce qui intéresse l'élève, dans ce cas, c'est de posséder la solution, que l'enseignant pourrait tout aussi bien, et même beaucoup plus simplement, lui donner directement. Mais ce qui, malgré tout, intéresse l'enseignant, c'est la démarche pour arriver à ce résultat tout autant que le résultat lui-même. Or, plus on insiste sur l'utilité des mathématiques et plus l'urgence de la solution risque d'occulter pour l'élève l'intérêt de la trouver lui-même. Certes, l'argument d'utilité peut accrocher l'élève, le motiver, dans la mesure où il garantit que le problème posé par l'enseignant est un vrai problème, un problème qui a un sens, et non un exercice scolaire qui ne signifie plus rien hors de l'école. Mais il faut bien comprendre que, pédagogiquement, ce qui est intéressant dans le problème utile, ce n'est pas qu'il est utile, mais qu'il est un vrai problème, présentant du sens pour l'élève.

Il y a, je crois, une motivation plus fondamentale que l'utilité : **le défi** que pose à l'élève le problème en tant que tel. Ce qui est important pour l'élève, ce n'est pas de connaître la solution, c'est d'être capable de la trouver **lui-même** et de se construire ainsi, à travers son activité mathématique, une image de soi positive, valorisante, face aux mathématiques. La récompense du problème résolu, ce n'est pas la solution du problème, c'est la réussite de celui qui l'a résolu par ses propres moyens, c'est l'image qu'il peut avoir de lui-même comme quelqu'un capable de résoudre des problèmes, de faire des maths, d'apprendre (6). L'image de soi face aux mathématiques, et, plus généralement, face au savoir et à l'école, face au monde adulte et à l'avenir : c'est là un enjeu terriblement sérieux, qu'il ne faut pas contourner en parlant de jeu ou de rentabilité immédiate des mathématiques. Cet enjeu est psychologique, très profondément, et culturel, car qu'est-ce que la culture sinon, d'abord, la capacité à se situer comme autonome, actif et créateur dans le monde environnant ? Cet enjeu est aussi social et politique. Face aux statistiques, aux sondages, aux indices, à l'utilisation de plus en plus fréquente de l'argument mathématique dans le discours social et politique, il n'est pas sans importance que les élèves conçoivent les mathématiques comme un univers très particulier qui n'est accessible qu'à certains ou comme une activité qui engendre ses résultats selon certaines règles, vérifiables par tous. De l'éducation civique à travers les mathématiques ? Bien sûr, dès lors que l'apprentissage des mathématiques repose sur une épistémologie implicite qui définit l'homme face au savoir, à la culture, à l'histoire et aux autres hommes.

ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

(liste non exhaustive)

Pour les repères historiques

G. WALUSINSKI, *Histoire d'un échec*, avril 1986, Bulletin A.P.M.E.P. n° 353.

A. REVUZ, *Mathématique moderne, mathématique vivante*, OCDL, 1970.

M. CHOUCHAN, *Le secondaire en proie aux mathématiques*, Esprit, nov.-déc. 1982.

Y. CHEVALLERD, *Mathématiques, langage, enseignement ; la réforme des années 60*, IREM Aix-Marseille, 1980.

Pour les méthodes d'enseignement

A. BOUVIER, J.-M. BRAEMER, Bulletin A.P.M.E.P. n° 331, déc. 1981.

G. GLAESER, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann.

A. BOUVIER, *La mystification mathématique*, Hermann, 1981.

Perspectives, n° 3, UNESCO, 1979.

S. BARUK, *Echecs et maths* et les ouvrages suivants.

R. DOUADY, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, thèse d'état, Université Paris VII, 1984.

J. ROGALSKI, *Acquisition de la bidimensionnalité (combinatoire-espace-mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire*, thèse d'état, Université Paris VII, 1985.

J. JULO, *Acquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes*, thèse 3e cycle, IREM de Rennes, 1982.

A. ROBERT, *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, thèse d'état, Paris VII, 1982.

Actes du colloque ALP-IREM, IREM de Lyon, 1985.

F. KONÉ, *Analyse des situations didactiques à l'aide de la théorie du jeu*, IREM de Bordeaux, 1980.

JEOMATRIE, IREM de Grenoble.

G. GLAESER, *Cours de 3e cycle, la mathématique et son enseignement*, IREM de Strasbourg, 1985.

Objectifs de l'enseignement et pratique enseignante dans le 1er cycle, IREM de Rennes, 1980.

Le raisonnement dans les situations-problèmes, IREM de Rouen, 1981.

Situations-Problèmes, IREM de Rouen, 1980.

La pratique du problème ouvert, IREM de Lyon, 1984.

Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts, IREM de Lyon, 1985.

La formation du raisonnement, IREM de Lille, 1980.

G. AUDIBERT, *Une problématique en géométrie de l'espace*, IREM de Montpellier, 1985.

L'enseignement par situations-problèmes, IREM du Mans, septembre 1986.